Über eine Klasse von kontinuierlichen Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen projektiven Gruppe des (2N — 1)-dimensionalen Raumes

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der Philosohischen Fakultät der Universität Basel

von

Leo (Leib) Krüger

aus Riga (Lettland).

Riga, 1934

Druckerei „STAR".

Über eine Klasse von kontinuierlichen Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen projektiven Gruppe des (2N — 1)-dimensionalen Raumes

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der Philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Leo (Leib) Krüger

aus Riga (Lettland).

Riga, 1934

Druckerei „STAR".

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herrn Professoren Dr. A. Ostrowski und Dr. O. Spiess.

Basel, den 4. Juli 1933.

Prof. Dr. M. Reinhardt
Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen lieben Eltern in Dankbarkeit gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546709_0132

Einleitung.

In der Theorie der kontinuierlichen Gruppen ist es eines der Hauptprobleme, alle Typen von linearen Gruppen aufzustellen. Doch ist es bis heute nicht gelungen, diese Aufgabe in ihrer Allgemeinheit zu lösen, und nach den bis jetzt untersuchten Fällen gibt es auch keine Anhaltspunkte, die es uns erlaubten, den zur Lösung des allgemeinen Problems einzuschlagenden Weg zu erkennen. Es ist daher von Bedeutung, an geeignet gewählten Spezialfällen durch Anwendung spezieller Methoden der Theorie der kontinuierlichen Gruppen das entsprechend spezialisierte Problem zu lösen.

In der vorliegenden Abhandlung ist es das folgende Problem, das wir mit Hilfe ausschliesslich algebraischer Methoden lösen:

Gegeben sind die allgemeinen linearen kontinuierlichen Gruppen[1])

$$\mathfrak{P}_N \qquad \boxed{x_a\, p_b} \qquad (a \gtreqless b) \qquad , \qquad p_b = \frac{\partial}{\partial x_b}$$

und

$$\Omega_N \qquad \boxed{y_a\, q_b} \qquad (a \gtreqless b) \qquad , \qquad q_b = \frac{\partial}{\partial y_b}$$

[1]) Wir setzen hier die Hauptsätze aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen als bekannt voraus. Siehe z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Theorie der kont. Gruppen, Leipzig 1931.

in je N homogenen Variabeln x bzw. y. Wir bilden die Gruppe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P}_N + \Omega_N \qquad \boxed{x_a p_b + y_a q_b} \qquad (a \gtrless b),$$

und *fragen nach sämtlichen Zwischengruppen* $\mathfrak{Z}$ *zwischen* $\mathfrak{G}$ *und der allgemeinen linearen projektiven Gruppe in 2N homogenen Variabeln:*

$$\mathfrak{P}_{2N} \qquad \boxed{x_a p_b , y_a p_b , x_a q_b , y_a q_b} \qquad (a \gtrless b).$$

Die Veranlassung zu dieser Problemstellung war die im Sinne der Invariantentheorie der Formen gestellte Frage nach sämtlichen umfassenden Gruppen der sogenannten *Fundamentalgruppe*[2]) zweier n-ären Formen ($n \geqq 3$). Sind die beiden Formen gleichen Grades und fragt man nach der Gruppe $\mathfrak{E}$, deren Transformationen die Gestalt

$$\sum_{a,b} A_{ab}\, x_a p_b + \sum_{a,b} B_{ab}\, y_a q_b \qquad (a \gtrless b)$$

---

[2]) Transformiert man die Variabeln x_n einer Form F durch die allgemeine lineare kontinuierliche Gruppe

$$x_a \frac{\partial}{\partial x_b} \qquad (a \gtrless b) \ ,$$

so induziert man dadurch im Koeffizientenraume eine projektive kontinuierliche Gurppe $\mathfrak{F}$, die sogenannte *Fundamentalgruppe* der Invariantentheorie der Form F. Ueber die Fundamentalgruppe vgl. man vor allem die folgenden Arbeiten: *A. Ostrowski*, Ueber eine neue Fragestellung in der algebraischen Invariantentheorie, Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinig. Bd. 23 (1924) p. 174; *G. Kowalewski*, Ueber die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Eigenschaft des 6-dimensionalen Raumes. Sächs. Ber., Bd. 54 (1902) p. 371; Ueber projektive Transformationsgruppen, Sächs. Ber. Bd. 55 (1903) p. 97; Projektive Transformationsgruppen, die nichts Ebenes invariant lassen und zweiteilige Normalgruppen (Fundamentalgruppen) enthalten, Wiener Ber. Bd. 122 (1913) p. 1949; *E. Schubarth*, Ueber die Fundamentalgruppe der Invariantentheorie einer allgemeinen Form in mehreren Variabeln. Verhand. d. nat. Gasell. Basel, Bd. 40, (1929) p. 35.

haben und die die Fundamentalgruppe der beiden Formen als echte Untergruppe enthält, so erweist sich die Gruppe $\mathfrak{E}$ als mit der obigen Gruppe $\mathfrak{G}$ identisch.

Wir hoffen in einer anschliessenden Arbeit auf diese Verhältnisse näher einzugehn und neben den in dieser Arbeit bestimmten, die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthaltenden Gruppen, auch noch diejenigen Gruppen zu bestimmen, die die Fundamentalgruppe zweier Formen, aber nicht die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalten.

Was die Einteilung der folgenden rein algebraischen Betrachtung anbetrifft, so sei folgendes bemerkt: Im §1 gehen wir zunächst auf die allgemeinen Eigenschaften der Transformationen der Gruppen $\mathfrak{Z}$ ein. Im §2 ermitteln wir diejenigen Gruppen $\mathfrak{Z}$, die ausser den Transformationen von $\mathfrak{G}$ nur noch mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbare Transformationen vom Gewichte Null enthalten. Im §3 betrachten wir solche Gruppen $\mathfrak{Z}$, die die Transformationen $x_a p_b$, $y_a q_b$ $(a \gtrless b)$ enthalten, in den beiden letzten §§ 4 und 5 schliesslich diejenigen Gruppen $\mathfrak{Z}$, in denen diese Transformationen nicht vorkommen.

Die der vorliegenden Abhandlung beigefügte Gruppentafel erlaubt es schliesslich die hier vorhandenen Zusammenhangsverhältnisse leicht zu überblicken. Dazu sei noch Folgendes bemerkt.

Sämtliche Gruppen, ausser denen des Feldes I, enthalten die Gruppe $\mathfrak{G}$ als Untergruppe. Die ganze Tafel ist in vier Felder eingeteilt entsprechend der soeben skizzierten Gruppeneinteilung die der Untersuchung zu Grunde liegt. Doch sind, wie man sieht, auch zwischen den einzelnen Feldern gewisse Zusammenhänge vorhanden. Einige Gruppen, wie z. B. die Gruppen $\mathfrak{Z}_7$ und $\mathfrak{Z}_8$ im ersten und $\mathfrak{Z}_3$ im zweiten Felde nehmen dadurch gewissermassen eine zentrale Stellung ein, dass sie in keiner anderen Gruppe als Untergruppe ste-

cken, dass dagegen die meisten oder alle Gruppen des ihnen zugehörigen oder eines benachbarten Feldes in ihnen als Untergruppen enthalten sind.

Die Anregung zur vorliegenden Arbeit, sowie viele wertvolle Ratschläge bei der endgültigen Abfassung derselben, verdanke ich meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Ostrowski. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Prof. Ostrowski für das freundliche Interesse und Entgegenkommen, mit dem er den Fortgang meiner Arbeit, sowie meiner Studien unterstützte, den herzlichsten Dank auszusprechen.

§ 1. Allgemeines über die Transformationen der Gruppen $\mathfrak{Z}$[4]).

1. Wir zeigen zuerst, dass man im Folgenden sich allein auf die Betrachtung *isobarer* Transformationen beschränken darf. Denn die Elemente, aus denen sich die Transformationen der Gruppen $\mathfrak{Z}$ zusammensetzen, sind:

$$x_a\, p_b\,, \quad y_a\, p_b\,, \quad x_a\, q_b\,. \quad y_a\, q_b \qquad (a \gtreqless b).$$

Legen wir nun allgemein

$$x_a\,,\ y_a \text{ das Gewicht } a,$$
$$p_a,\ q_a \text{ das Gewicht } -a$$

bei, und ist,

$$(1,1)\quad S_{mn} = (A_{mn}x_m + B_{mn}y_m)p_n + (C_{mn}x_m + D_{mn}y_m)q_n$$

gesetzt,

$$(2,1)\qquad P_{g_j} = \sum_{m-n=g_j} S_{mn}$$

eine allgemeine isobare Transformation aus $\mathfrak{Z}$ vom Gewichte $m-n = g_j \neq 0$, ist ferner

---

[4]) Eine Zusammenstellung der hier benutzten abkürzendeu Bezeichnungen findet sich im Anhang; dort werden auch die wichtigsten im Text vorkommenden Klammeroperationen ausführlicher durchgerechnet. Wir weisen darauf im Text durch Angabe der betreffenden Nummer hin.

$$U = \sum_{k=1}^{N} k(x_k\, p_k + y_k\, q_k)$$

eine Transformation vom Gewichte Null aus $\mathfrak{G}$, so gilt:

$$(3,1)\ (U, P_{g_j}) = g_j\, P_{g_j},\ (U,(U, P_{g_j})) = g^2{}_j\, P_{g_j}, \ldots$$

$$\underbrace{(U,(U,\ldots(U}_{\text{i-mal}},P_{g_j})\ldots)) = g^i{}_j\, P_{g_j}.$$

(Siehe Anh. 27). Wir behaupten nun:

Ist P eine Transformation von $\mathfrak{Z}$ und zerlegen wir sie in isobare Bestandteile von verschiedenem Gewicht g_j $(j = 1,2, \ldots, J)$:

$$P = P_{g_1} + P_{g_2} + \ldots\ldots + P_{g_J},$$

so sind auch $P_{g_1}, \ldots\ldots, P_{g_J}$ in $\mathfrak{Z}$ enthalten.

Denn auch

$$\underbrace{(U(U.\,.\,(U}_{\text{i-mal}},P)\ldots)) = g^i{}_1\, P_{g_1} + g^i{}_2\, P_{g_2} + \ldots + g^i{}_J\, P_{g_J} \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ist eine Transformation von $\mathfrak{Z}$, woraus aber sofort folgt, da die g_j alle voneinander verschieden sind, dass die P_{g_j} selbständig in $\mathfrak{Z}$ vorkommen.

2. Wir haben schon in der vorigen Nummer eine Transformation hingeschrieben (Formel (2,1)), die als die allgemeinste Gestalt einer in $\mathfrak{Z}$ möglicherweise vorkommenden isobaren Transformation vom Gewichte $g \neq 0$ aufzufassen ist. Wir behaupten nun, dass *mit P_g auch jeder einzelne Ausdruck S_{mn} $(m - n = g$, Formel (1,1)) als unabhängige Transformation in $\mathfrak{Z}$ vorkommt, wenn $g \neq 0$ ist.*

In der Tat, klammert man P_g mit der Transformation $g_{ba} = x_b\, p_a + y_b\, q_a$ $(b - a = -g)$, so erhält man (s. Anh. 24):

$$P^* = (P_g, g_{ba}) = \sum_{m-n=g} (S_{mn}, g_{ba}) = (S_{ab}, g_{ba}) =$$

$$= [(A_{ab}x_a + B_{ab}y_a)p_a + (C_{ab}x_a + D_{ab}y_a)q_a] -$$

$$- [(A_{ab}x_b + B_{ab}y_b)p_b + (C_{ab}x_b + D_{ab}y_b)q_b].$$

Klammert man P^* weiter mit g_{ab} $(a - b = g)$, so ergibt sich:

$$(4,1) \qquad (P^*, g_{ab}) = 2S_{ab} ,$$

so dass in der Tat S_{ab} $(a - b = g)$ selbständig in $\mathfrak{Z}$ vorkommt.

3. Die Transformation S_{ab} lässt sich nun, wie leicht ersichtlich, in der Form

$$kg_{ab} + W_{ab}$$

schreiben, wo W_{ab} die Gestalt hat:

$$(5,1) \quad W_{ab} = r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b \quad (a \gtrless b) .$$

Wir dürfen daher im Folgenden bei Transformationen vom Gewichte $\neq 0$ annehmen, dass sie vom Typus W_{ab} sind. Aus den Klammerrelationen (s. Anh. 25):

$$(6,1) \quad (W_{ab}, g_{bd}) = W_{ad}, \quad (g_{ca}, W_{ad}) = W_{cd} \quad (a \neq d, c \neq d)$$

folgt nun: *Kommt in $\mathfrak{Z}$ für $a_0 \neq b_0$ eine nicht identisch verschwindende Transformation*

$$W_{a_0 b_0} = r\Delta_{a_0 b_0} + sy_{a_0} p_{b_0} + tx_{a_0} q_{b_0}$$

vor, so kommen in $\mathfrak{Z}$ auch sämtliche Transformationen

$$W_{ab} = r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b \quad (a \gtrless b)$$

mit $a \neq b$ vor. Speziell kommt also neben W_{ab} auch W_{ba} vor. Wir führen hier noch die folgenden Klammerrelationen an (s. Anh. 25, 26):

$$(7,1)\quad (W_{ab}, g_{ba}) = W_{aa} - W_{bb} \qquad (a \neq b),$$

$$(8,1)\quad (W_{aa} - W_{bb}, g_{ab}) = (W_{aa}, g_{ab}) - (W_{bb}, g_{ab}) = 2W_{ab} \qquad (a \neq b),$$

$$(9,1)\quad (W_{ab}, W_{bd}) = (r^2 + st)g_{ad} \qquad (a \neq d),$$

$$(10,1)\quad (W_{ab}, W_{ba}) = (r^2 + st)(g_{aa} - g_{bb}) \qquad (a \neq b).$$

Aus (7,1) folgt insbesondere, dass mit $W_{a'b'}$ $(a' \neq b')$ in $\mathfrak{Z}$ auch alle Transformationen $W_{aa} - W_{bb}$ $(a \neq b)$ vorkommen. *Es leuchtet ohne weiteres ein, dass in* $\mathfrak{Z}$ *nicht mehr als drei in bezug auf* $\mathfrak{G}$ *linear unabhängige Transformationen*[4]) W_{ab} *vorkommen können.*

4. Man nennt bekanntlich nach S. Lie zwei infinitesimale Transformationen X_1, X_2 *miteinander vertauschbar*, wenn ihr Klammerausdruck gleich Null ist: $(X_1, X_2) = 0$.

Wir betrachten nun die Transformationen vom Gewichte Null, die neben g_{aa} in $\mathfrak{Z}$ vorkommen können. Diese sind entweder derart, dass sie mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, oder derart, dass dies nicht der Fall ist. Zu den letzteren gehören z. B. wegen (8,1) die Transformationen $W_{aa} - W_{bb}$.

Die allgemeinste Transformation vom Gewichte Null hat in unserem Falle die Gestalt:

$$T = \sum_{k=1}^{N} (A_k x_k p_k + B_k y_k p_k + C_k x_k q_k + D_k y_k q_k).$$

[4]) Wir nennen die Transformationen S_1, S_2, ..., S_m linear unabhängig in bezug auf $\mathfrak{G}$, wenn sich keine lineare Kombination $\sum_{i=1}^{m} c_i S_i$ angeben lässt mit nicht sämtlich verschwindenden c_i, die zu $\mathfrak{G}$ gehört.

Bildet man den Klammerausdruck (s. Anhang 28):

$$(T,\ \mathfrak{g}_{ab}) = (A_a - A_b)x_a p_b + (B_a - B_b)y_a p_b + \\ + (C_a - C_b)x_a q_b + (D_a - D_b)y_a q_b ,$$

so folgt hieraus, dass T nur dann mit *sämtlichen* Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, wenn alle A_k und ebenso alle B_k, C_k, D_k untereinander gleich sind. Setzen wir daher:

$$A_a = A_b \ldots = A_k \ldots = A, \qquad B_a = B_b \ldots = B_k \ldots = B,$$
$$C_a = C_b \ldots = C_k \ldots = C, \qquad D_a = D_b \ldots = D_k \ldots = D,$$

so ergibt sich für die allgemeinste Gestalt einer mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Transformationen vom Gewichte Null der Ausdruck:

$$V = A\sum_{k=1}^{N} x_k p_k + B\sum_{k=1}^{N} y_k p_k + C\sum_{k=1}^{N} x_k q_k + D\sum_{k=1}^{N} y_k q_k .$$

Umgekehrt ist auch eine jede Transformation von dieser Gestalt mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar.

Die Transformationen T bzw. V lassen sich auch in der Form:

$$T = T^* + \sum_k c_k \mathfrak{g}_{kk} \quad [5]),$$

$$(11,1) \qquad T^* = \sum_k (E_k \Delta_{kk} + B_k y_k p_k + C_k x_k q_k),$$

bzw.

$$V = V^* + cS_0 ,$$

$$(12\ 1) \qquad V^* = E\Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq \quad [6])$$

---

[5]) Hier wie im Folgenden ist unter $\sum_k$ stets $\sum_{k=1}^{N}$ zu verstehen.

[6]) Wir lassen hier wie im Folgenden bei Transformationen vom Typus V^* den Summationsindex k fort.

schreiben, so dass wir uns im Folgenden allein auf die Betrachtung der Transformationen von der Form T^*, V^* beschränken dürfen.

5. Offenbar kann es in $\mathfrak{Z}$ nicht mehr als *drei* voneinander unabhängige Transformationen vom Typus V^* geben. Gibt es überhaupt Transformationen T^*, die nicht zu den vertauschbaren gehören, so dürfen wir sicher annehmen, dass es Transformationen $T_1{}^*$, $T_2{}^*$, . . ., $T_n{}^*$ vom Gewichte Null gibt, derart, dass für kein nicht durchweg verschwindendes Zahlensystem a_1, a_2, . . ., a_n die Transformation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \, T_i{}^*$$

sich linear zusammensetzen lässt aus den Transformationen g_{aa} und den Transformationen V^*, und dass andererseits sich jede Transformation aus $\mathfrak{Z}$ vom Gewichte Null linear aus den g_{aa}, V^*, $T_1{}^*$, $T_2{}^*$, . . ., $T_n{}^*$ zusammensetzen lässt.

Aus dem Klammerausdruck (s. Anh. 28):

$$(13{,}1)\quad (T^*, g_{ab}) = (E_a - E_b)\Delta_{ab} + (B_a - B_b) y_a p_b + \\ + (C_a - C_b) x_a q_b \qquad (a \neq b)$$

folgt nun, dass wenn ein T^* in $\mathfrak{Z}$ vorkommt, auch sicher eine nicht identisch verschwindende Transformation vom Typus W_{ab} in $\mathfrak{Z}$ vorkommen muss, da sonst, wenn alle Differenzen $(E_a - E_b)$, $(B_a - B_b)$, $(C_a - C_b)$ für jedes Zahlenpaar a, b Null wären, die Transformation T^* vertauschbar sein müsste. *Man wird daher in vielen Fällen von der Gestalt der in $\mathfrak{Z}$ vorkommenden Transformation W_{ab} auf diejenige von T^* schliessen dürfen.*

6. Wir schreiben hier noch die folgenden, später oft zu benutzenden Klammerrelationen hin (s. Anh. 29):

(14,1) $(V^*, W_{ab}) = V_{ab} \qquad (a \gtrless b),$

$V_{ab} = (sC - tB)\Delta_{ab} + 2(rB - sE)y_a p_b + 2(tE - rC)x_a q_b;$

(15,1) $(T^*, W_{ab}) = u g_{ab} + T_{ab}$ [7] $\qquad (a \gtrless b),$

$$T_{ab} = \tfrac{1}{2}[s(C_a + C_b) - t(B_a + B_b)]\Delta_{ab} + [r(B_a + B_b) - s(E_a + E_b)]y_a p_b + [t(E_a + E_b) - r(C_a + C_b)]x_a q_b .$$

Die Transformationen V_{ab} bzw. T_{ab}, die ebenfalls vom Typus W_{ab} sind, kommen daher auch unabhängig in $\mathfrak{Z}$ vor, können aber identisch verschwinden.

Aus den Klammerrelationen 3, 4, I, II, III, IV, V des Anhangs ergibt sich schliesslich noch die Tatsache, *dass, wenn in* $\mathfrak{Z}$ *neben den Transformationen von* $\mathfrak{G}$ *mindestens eine Transformation* $x_a q_b$ *und mindestens eine Transformation* $y_c p_d$ $(a \gtrless b,$ $c \gtrless d,$ $a \gtrless c,$ $b \gtrless d)$ *vorkommen, dass dann die Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *mit der allgemeinen projektiven Gruppe* $\mathfrak{P}_{2N}$ *identisch ist.*

Wir dürfen im Folgenden annehmen, dass $\mathfrak{Z}$ weder mit $\mathfrak{G}$ noch mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch ist.

Es sei ferner daran erinnert, dass, wenn $\mathfrak{Z}$ eine Transformation vom Typus $x_a p_b$ enthält, dann in $\mathfrak{Z}$ auch $y_a q_b$ vorkommen muss und umgekehrt, da ja $g_{ab} = x_a p_b + y_a q_b$ in $\mathfrak{Z}$ vorkommt.

Wir nennen im Folgenden zwei Transformationen S_1 und S_2 *kongruent modulo* $\mathfrak{Z}$, in Zeichen:

$$S_1 \equiv S_2 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}),$$

wenn ihre Differenz in $\mathfrak{Z}$ vorkommt.

---

[7] Dabei hat u den Wert:

$$u = r(E_a - E_b) + \tfrac{1}{2}[s(C_a - C_b) + t(B_a - B_b)].$$

§ 2. Gruppen $\mathfrak{Z}$, die ausser den Transformationen von $\mathfrak{G}$ nur noch mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbare Transformationen vom Gewichte Null enthalten.

7. Wir unterscheiden hier die beiden Fälle *b*), *a*), je nachdem ob X_0, Y_0 in $\mathfrak{Z}$ vorkommen oder nicht. (Da ihre Summe S_0 in $\mathfrak{G}$ vorkommt, kommen X_0, Y_0 nur gleichzeitig in $\mathfrak{Z}$ vor).

a) *Die Transformationen X_0, Y_0 kommen in $\mathfrak{Z}$ nicht vor.*

8. Dann kann auch Δ_0 nicht in $\mathfrak{Z}$ vorkommen, wegen $\frac{S_0 + \Delta_0}{2} = X_0$. Kommen nun in $\mathfrak{Z}$ keine zwei in bezug auf $\mathfrak{G}$ linear unabhängige Transformationen V^* vor, so erhalten wir die Gruppe

$$\mathfrak{Z}^1 \qquad \boxed{\mathfrak{G},\ l\Delta_0 + m\sum yp + n\sum xq}$$

wo nicht zugleich $m = 0$, $n = 0$ sein kann, wegen der Annahme *a*). Da es nur auf die Verhältnisse der Parameter l, m, n ankommt, gibt es ∞^2 Gruppen vom Typus $\mathfrak{Z}^1$.

Wir wollen nunmehr annehmen, *dass $\mathfrak{Z}$ mehr als eine in bezug auf $\mathfrak{G}$ linear unabhängige Transformation V^* enthält. Dann kann $\mathfrak{Z}$ weder $\sum xq$ noch $\sum yp$ enthalten.* Denn es möge etwa $\sum xq$ in $\mathfrak{Z}$ enthalten sein, und es sei $V_0{}^*$ eine weitere, von $\sum xq$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ unabhängige Transformation von der Gestalt V^*:

$$V_0 = E\Delta_0 + B\sum yp\ ;$$

(man darf offenbar C in $V_0{}^*$ als gleich 0 voraussetzen). Nach dem Obigen ist hier $B \neq 0$. Bilden wir den Klammerausdruck (s. Anh. 30):

$$(V_0^*, \sum xq) = 2E\sum xq - B\Delta_0,$$

so sehen wir, dass wegen $B \neq 0$ in $\mathfrak{Z}$ auch Δ_0 vorkommen würde, entgegen der Annahme *a*). Analog beweist man unsere Behauptung für $\sum yp$.

9. Ferner behaupten wir, *dass in unserem Falle die Anzahl der in Bezug auf* $\mathfrak{G}$ *linear unabhängigen Transformationen* V^* *stets gleich zwei ist, und sie lassen sich dann in der Gestalt*:

(1,2) $v_1 = \Delta_0 + r\sum yp$, (2,2) $v_2 = \Delta_0 + s\sum xq$ $(r \neq 0,\ s \neq 0)$

wählen.

Denn kämen in $\mathfrak{Z}$ drei linear unabhängige Transformationen V^* vor, etwa:

$$V_1^* = E_1\Delta_0 + B_1\sum yp + C_1\sum xq,$$
$$V_2^* = E_2\Delta_0 + B_2\sum yp + C_2\sum xq,$$
$$V_3^* = E_3\Delta_0 + B_3\sum yp + C_3\sum xq,$$

so müsste ihre Koeffizientenmatrix $\neq 0$ sein, dann aber könnten wir aus ihnen Δ_0 linear zusammensetzen, wiederum entgegen der Annahme *a*).

10. Es seien V_1^*, V_2^* zwei linear unabhängige Transformationen aus $\mathfrak{Z}$:

$$V_1^* = E_1\Delta_0 + B_1\sum yp + C_1\sum xq,$$
$$V_2^* = E_2\Delta_0 + B_2\sum yp + C_2\sum xq.$$

Dann kann nicht $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$ sein, denn sonst würde Δ_0 in $\mathfrak{Z}$ vorkommen, oder V_1^*, V_2^* wären abhängig, entgegen der Annahme.

Wir bilden jetzt die linearen Kombinationen:

$$C_2V_1^* - C_1V_2^* = (C_2E_1 - C_1E_2)\Delta_0 + (C_2B_1 - C_1B_2)\sum yp,$$

$$B_2V_1^* - B_1V_2^* = (B_2E_1 - B_1E_2)\Delta_0 + (B_2C_1 - B_1C_2)\sum xq.$$

Hier kann nun weder $k_1 = (C_2E_1 - C_1E_2)$ noch $k_2 = (B_2E_1 - B_1E_2)$ gleich Null sein, denn sonst würde in $\mathfrak{Z}$ $\sum yp$ bzw. $\sum xq$ vorkommen; wir dürfen daher in den obigen Ausdrücken durch k_1 bzw. k_2 durchdividieren und erhalten zwei Transformationen v_1, v_2 von der Gestalt (1,2), (2,2), wie behauptet.

Bilden wir nun den Klammerausdruck (s. Anh. 31):

$$(3,2) \qquad (v_1, v_2) = -rs\Delta_0 + 2r\sum yp + 2s\sum xq,$$

addieren hierzu $2(v_1 - v_2)$ und dividieren durch $-rs$, so ergibt sich:

$$\Delta_0 - \frac{4}{s}\sum yp.$$

Nach dem Obigen muss aber

$$-\frac{4}{s} = r$$

sein. Wir erhalten daher, $r = 2t$, $s = -\frac{2}{t}$ $(t \neq 0)$ gesetzt, für v_1, v_2 die Ausdrücke:

$$v_1^* = \Delta_0 + 2t\sum yp, \qquad v_2^* = \Delta_0 - \frac{2}{t}\sum xq,$$

für die (v_1^*, v_2^*) sich linear aus v_1^*, v_2^* zusammensetzt. Damit ergibt sich die Gruppe:

$$\mathfrak{Z}^2 \left| \quad \mathfrak{G}, \quad \Delta_0 + 2t\sum yp,\ \Delta_0 - \frac{2}{t}\sum xq \quad \right| \quad (t \neq 0).$$

11. Wir kommen zum Falle *b*):

b). *Gruppen* $\mathfrak{Z}$, *die die Transformationen* X_0, Y_0 *enthalten.*

Mit X_0, Y_0 kommt in $\mathfrak{Z}$ auch Δ_0 vor. Die von X_0 und Y_0 in bezug auf $\mathfrak{G}$ linear unabhängige Transformation V^* aus $\mathfrak{Z}$ lässt sich daher reduzieren auf:

$$V^{**} = B\sum yp + C\sum xq.$$

Dann enthält $\mathfrak{Z}$ auch

$$(V^{**}, X_0) = B\sum yp - C\sum xq.$$

Ist nun $B \neq 0$, $C \neq 0$, so kommen $\sum yp$, $\sum xq$ in $\mathfrak{Z}$ vor, und wir erhalten die Gruppe:

$\mathfrak{Z}_3$ $\quad \mathfrak{G},\ \sum xp,\ \sum yq,\ \sum yp,\ \sum xq$,

deren Gruppencharakter sich aus den Klammerrelationen VIII, 12, 13, 14, 15, 16 des Anhangs ergibt. Ist $B = 0$, $C \neq 0$, so erhalten wir die Gruppe:

$\mathfrak{Z}_4$ $\quad \mathfrak{G},\ \sum xp,\ \sum yq,\ \sum xq$

mit den Klammerrelationen VIII, 12, 14 des Anhangs. Analog erhalten wir für $B = 0$, $C = 0$ die Gruppe:

$\mathfrak{Z}_5$ $\quad \mathfrak{G},\ \sum xp,\ \sum yq,\ \sum yp$

mit den Klammerrelationen VIII, 13, 15 des Anhangs und schliesslich für $B = 0$, $C = 0$ die Gruppe:

$\mathfrak{Z}^6$ $\boxed{\mathfrak{G},\ \sum xp,\ \sum yq}$.

§ 3. Gruppen $\mathfrak{Z}$, die die Transformationen $x_a p_b$ und $y_a q_b$ $(a \gtrless b)$ enthalten.

12. In diesem Falle lässt es sich leicht zeigen, dass ausser den drei Gruppen:

$\mathfrak{Z}^7$ $\boxed{x_a p_b\ ,\ y_a q_b\ ,\ x_a q_b}$ $(a \gtrless b)$,

$\mathfrak{Z}^8$ $\boxed{x_a p_b\ ,\ y_a q_b\ ,\ y_a p_b}$ $(a \gtrless b)$,

$\mathfrak{G}'$ $\boxed{x_a p_b\ ,\ y_a q_b}$ $(a \gtrless b)$,

deren Gruppencharakter sich aus den Klammerrelationen I — VII des Anhangs ergibt, *es keine weiteren Gruppen* $\mathfrak{Z}$ *geben kann.*

In der Tat reduzieren sich jetzt die Transformationen W_{ab}, V^*, T^* des § 1, die in $\mathfrak{Z}$ neben denjenigen von $\mathfrak{G}$ und den Transformationen $x_a p_b$, $y_a q_b$ $(a \gtrless b)$ noch möglicherweise vorkommen können, auf:

$$W'_{ab} = s y_a p_b + t x_a q_b \ , \quad V^{*\prime} = B \sum yp + C \sum xq \ ,$$

$$T^{*\prime} = \sum_k (B_k y_k p + C_k x_k q_k).$$

Da aber das Vorkommen von $T^{*\prime}$ auch das Vorkommen einer Transformation vom Typus W'_{ab} nach sich zieht, genügt es, die obige Behauptung unter der Annahme zu beweisen, dass in $\mathfrak{Z}$ neben den Transformationen $x_a p_b$, $y_a q_b$ $(a \gtreqless b)$ die Transformationen vom Typus W'_{ab} oder $V^{*\prime}$ vorkommen.

13. Es komme zuerst in $\mathfrak{Z}$ eine Transformation $V^{*\prime}$, vor. Dann gilt (s. Anh. 32):

$$(V^{*\prime}, x_a p_b) = By_a p_b - Cx_a q_b = u_{ab} \ ,$$

$$(V^{*\prime}, y_a q_b) = Cx_a q_b - By_a p_b = -u_{ab}.$$

u_{ab} ist eine Transformation vom Typus W'_{ab}. Wir brauchen also unsere Behauptung nur unter der Annahme zu beweisen, dass W'_{ab} in $\mathfrak{Z}$ vorkommt. Nun ist:

$$(W'_{ab}, x_b p_d) = sy_a p_d \ , \qquad (W'_{ab}, y_b q_d) = tx_a q_d \ ;$$

daraus folgt aber, dass entweder s oder t gleich Null ist, denn sonst würde $\mathfrak{Z}$ sowohl $x_a q_d$, als auch $y_a p_d$ enthalten und müsste daher nach dem am Schlusse des § 1 Gesagten mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch sein. Andererseits muss entweder s oder t von 0 verschieden sein, da sonst W'_{ab} identisch Null wäre. Daher ergeben sich zwei Fälle: entweder enthält $\mathfrak{Z}$ alle Transformationen $x_a q_b$ $(a \gtreqless b)$ und damit auch die ganze Gruppe $\mathfrak{Z}_7$, oder aber $\mathfrak{Z}$ enthält die ganze Gruppe $\mathfrak{Z}_8$. Enthält $\mathfrak{Z}$ etwa $\mathfrak{Z}_7$, so kann es keine in $\mathfrak{Z}_7$ nicht vorkommenden Transformationen enthalten, denn dann müsste es auch in $\mathfrak{Z}_7$ nicht vorkommende Transformationen vom Typus $W'_{ab} = sy_a p_b$ enthalten und dann wäre in $\mathfrak{Z}$ auch

$x_a q_b$ enthalten und $\mathfrak{Z}$ somit mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch. Analog schliesst man im zweiten Fall. Enthält schliesslich $\mathfrak{Z}$ keine Transformationen vom Typus W'_{ab}, und daher auch keine vom Typus $V^{*\prime}$, $T^{*\prime}$ so erhalten wir die Gruppe $\mathfrak{G}'$.

14. Wir haben schon oben hervorgehoben, dass in jeder Obergruppe von $\mathfrak{G}$ Transformationen vom Typus $x_a p_b$, $y_a q_b$ nur gleichzeitig vorkommen können. Wir wenden uns daher jetzt der Betrachtung derjenigen Gruppen zu, die *keine Transformationen von der Form* $x_a p_b$ *und* $y_a q_b$, $(a \gtrless b)$ *enthalten.* Dabei unterscheiden wir die beiden Hauptfälle, je nachdem in $\mathfrak{Z}$ *zwei* (in Bezug auf $\mathfrak{G}$) linear unabhängige Transformationen vom Typus W_{ab} vorkommen (§ 5) oder nur *eine* (§ 4). Denn kommen in $\mathfrak{Z}$ drei linear voneinander unabhängige Transformationen vom Typus W_{ab} vor, so ist nach dem am Schlusse des §1 Gesagten $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch.

§ 4. Gruppen $\mathfrak{Z}$, die keine Transformationen von der Form $x_a p_b$, $y_a q_b$ $(a \gtrless b)$ und kein Paar (mod $\mathfrak{G}$) linear unabhaengiger Transformationen vom Typus W_{ab} $(a \gtrless b)$ enthalten.

15. Enthält $\mathfrak{Z}$ weder Transformationen von der Form $x_a p_b$, noch solche von der Form $y_a q_b$, so kann auch $\Delta_{ab} = x_a p_b - y_a q_b$ in $\mathfrak{Z}$ nicht vorkommen, wegen $\frac{g_{ab} + \Delta_{ab}}{2} = x_a p_b$, $\frac{g_{ab} - \Delta_{ab}}{2} = y_a q_b$.

Daraus folgt, dass in einer nicht identisch verschwindenden Transformation aus $\mathfrak{Z}$ von der Form

$$W_{ab} = r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b \quad (a \gtrless b)$$

nicht zugleich s und t gleich Null sein können.

Aus den in §1 angegebenen Klammerrelationen (6,1), (7,1), (8,1), (9,1), (10,1) ergibt sich zunächst ohne Weiteres der Gruppencharakter der Gruppe:

$\mathfrak{Z}_9$ $\quad \boxed{\mathfrak{G},\ W_{ab},\ W_{aa} - W_{bb}} \quad (a \gtrless b)$

und der sie umfassenden Gruppe:

$\mathfrak{Z}_{10}$ $\quad \boxed{\mathfrak{G},\ W_{ab}} \quad (a \gtrless b).$

Da es dabei nur auf die Verhältnisse der Parameter r, s, t ankommt, gibt es sowohl ∞^2 Gruppen vom Typus $\mathfrak{Z}_9$ als auch ∞^2 Gruppen vom Typus $\mathfrak{Z}_{10}$. (Es sei noch bemerkt, dass die Gruppe $\mathfrak{Z}_9$ Transformationen vom Typus $\sum_k C_k W_{kk}$ enthält, die lineare Kombinationen von $W_{aa} - W_{bb}$ sind; solche Transformationen sind offenbar dadurch charakterisiert, dass für sie $\sum_k C_k = 0$ ist).

16. Nach den an (6,1) und (7,1) geknüpften Bemerkungen, enthält $\mathfrak{Z}$ auf jeden Fall die Gruppe $\mathfrak{Z}_9$ als Untergruppe. Es sei nun $\mathfrak{Z}$ weder vom Typus $\mathfrak{Z}_9$ noch vom Typus $\mathfrak{Z}_{10}$. Nach dem auf pp. 10—13 Gesagten kommen dann zu den Transformationen von $\mathfrak{Z}_9$ noch gewisse Transformationen vom Gewichte Null, vom Typus V^*, (12,1) oder T^*, (11,1) hinzu. Daher enthält $\mathfrak{Z}$ entweder Transformationen vom Typus V^* oder solche vom Typus T^*, die

nicht von der Gestalt $\sum_k C_k W_k$, $\sum_k C_k = 0$, sind, oder Transformationen beider Typen. In diesen Fällen aber ist die spezielle Gestalt der Transformation W_{ab} für die weitere Untersuchung ausschlaggebend, so dass wir folgende sechs Fälle einzeln zu betrachten haben:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I}_1.\ r = s = 0,\ t \neq 0; & W_{ab} = x_a\, q_b\ ; \\
\text{I}_2.\ r = t = 0,\ s \neq 0; & W_{ab} = y_a\, p_b\ ; \\
\text{II}_1.\ s = 0,\ r \neq 0,\ t \neq 0; & \\
\qquad & W_{ab} = r\Delta_{ab} + t x_a\, q_b\ ; \\
\text{II}_2.\ t = 0,\ r \neq 0,\ s \neq 0; & \\
\qquad & W_{ab} = r\Delta_{ab} + s y_a\, p_b\ ; \\
\text{III}.\ r = 0,\ s \neq 0,\ t \neq 0; & \\
\qquad & W_{ab} = s y_a\, p_b + t x_a\, q_b\ ; \\
\text{IV}.\ r \neq 0,\ s \neq 0,\ t \neq 0; & \\
\qquad & W_{ab} = r\Delta_{ab} + s y_a\, p_b + t x_a\, q_b\ .
\end{array}\right\} (a \gtrless b)$$

Die Fälle I_2, II_2 werden nicht ausführlich behandelt werden, weil die in den Fällen I_1 bzw. II_1 geführten Ueberlegungen sich aus Symmetriegründen ohne Weiteres auf die Fälle I_2 bzw. II_2 übertragen lassen.

$$\underline{\text{I}_1.\ W_{ab} = x_a\, q_b \quad (a \gtrless b).}$$

17. Dann kommen in $\mathfrak{Z}$ auch die Transformationen

$$W_{aa} - W_{bb} = x_a\, q_a - x_b\, q_b$$

vor. Wir zeigen zuerst, dass in diesem Fall die Transformationen vom Typus V^* bzw. T^* aus $\mathfrak{Z}$ die Gestalt:

$$E\,\Delta_0 + C\sum xq$$

bzw.

$$E'\Delta_0 + \sum_k C_k\, x_k\, q_k$$

haben.

In der Tat, es sei zunächst

$V^* = E\Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}}$ aber nicht identisch Null. Klammern wir V^* mit $x_a\, q_b$ $(a \gtrless b)$, so folgt aus Formel (14,1) für $r = s = 0$, dass

$V_{ab} = -B\Delta_{ab} + 2\, E\, x_a\, q_b \equiv -B\Delta_{ab} \pmod{\mathfrak{Z}^9}$ sein muss. Daher muss $B = 0$ sein, da sonst Δ_{ab} in $\mathfrak{Z}$ enthalten wäre.

Ist aber

$T^* = \sum_k (E_k\, \Delta_{kk} + B_k\, y_k\, p_k + C_k\, x_k\, q_k) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}}$

und nicht identisch Null, so folgt, dass in der Relation (13,1)

$$E_a - E_b = 0,\ B_a - B_b = 0$$

für jedes Wertepaar a, b sein muss, da sonst neben $W_{ab} = x_a\, q_b$ eine zweite von $x_a\, q_b$ verschiedene Transformation vom Typus W_{ab} in $\mathfrak{Z}$ vorkommen würde, entgegen der Annahme über $\mathfrak{Z}$. Die Koeffizienten E_k bzw. B_k sind daher alle untereinander gleich, und T^* reduziert sich, wenn wir $E_k = E'$, $B_k = B'$ setzen, auf

$$T^* = E'\Delta_0 + B'\sum_k y_k\, p_k + \sum_k C_k\, x_k\, q_k .$$

Bilden wir nun den Klammerausdruck $(T^*, x_a\, q_b)$, so folgt aus der Formel (15,1) für $r = s = 0$, $E_a = E_b = E'$, $B_a = B_b = B'$,

$(T^*, x_a\, q_b) \equiv T_{ab} = -B'\Delta_{ab} + 2\, E'\, x_a\, q_b \equiv$

$$\equiv -B' \Delta_{ab} \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_9).$$

Daher muss $B' = 0$ sein.

Wir bezeichnen im Folgenden vorübergehend mit $\mathfrak{Z}'$ eine Gruppe $\mathfrak{Z}$, die die Transformationen $x_a q_a$ nicht enthält, mit $\mathfrak{Z}^*$ dagegen eine solche Gruppe $\mathfrak{Z}$, in der die Transformationen $x_a q_a$ einzeln vorkommen. Es ist $\mathfrak{Z}_9$ in $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}_{10}$ in $\mathfrak{Z}^*$, nicht aber in $\mathfrak{Z}'$ enthalten.

Dann haben wir die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

a) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'$, Δ_0 *kommt in* $\mathfrak{Z}$ *nicht vor.*

18. In diesem Falle werden wir zeigen, dass in $\mathfrak{Z}$ die Transformationen

$$u(t) = \Delta_0 + t x_a q_a \quad (a = 1,2,\ldots,N)$$

vorkommen müssen mit einem für die Gruppe $\mathfrak{Z}$ charakteristischen, eindeutig bestimmten Wert des Parameters $t \neq 0$. Es ist zunächst klar, dass zwei Transformationen

$$\Delta_0 + t_1 x_a q_a, \quad \Delta_0 + t_2 x_a q_a$$

mit $t_1 \neq t_2$ in $\mathfrak{Z}$ nicht zugleich vorkommen können, da sonst auch Δ_0 in $\mathfrak{Z}$ vorkommen würde. Ferner gilt, wegen $x_a q_a \equiv x_b q_b \pmod{\mathfrak{Z}_9}$,

$$V^* = E\Delta_0 + C\sum xq \equiv E\Delta_0 + CN x_a q_a \pmod{\mathfrak{Z}_9}.$$

Aus der Annahme *a)* folgt dann, dass entweder keiner der Koeffizienten E, C gleich Null ist, oder aber V^* identisch verschwindet. Die Transformation

$$\Delta_0 + \frac{CN}{E} x_a q_a$$

ist nun wegen $E \neq 0$, $C \neq 0$ eine solche vom

Typus $u(t)$, wenn wir $\frac{CN}{E} = t$ setzen. Insbesondere folgt:

$$V^* \equiv Eu(t) \pmod{\mathfrak{Z}_9},$$

so dass es in $\mathfrak{Z}$ kein Paar in Bezug auf $\mathfrak{Z}_9$ linear unabhängiger Transformationen vom Typus V^* gibt.

Andererseits gilt aber, wegen $x_a q_a \equiv x_b q_b \pmod{\mathfrak{Z}_9}$,

$$T^* = E' \Delta_0 + \sum_k C_k x_k q_k \equiv E' \Delta_0 + C' x_a q_a \pmod{\mathfrak{Z}_9},$$

wo $C' = \sum_k C_k$ ist. Und hier kann, wenn T^* nicht bereits in $\mathfrak{Z}_9$ vorkommt, weder $E' = 0$ noch $C' = 0$ sein. Die Transformation

$$\Delta_0 + \frac{C'}{E'} x_a q_a$$

ist aber wiederum eine solche vom Typus $u(t)$ für $\frac{C'}{E'} = t$.

Insbesondere folgt:

$$T^* \equiv E' u(t), \pmod{\mathfrak{Z}_9},$$

wie behauptet.

Damit erhalten wir die Gruppe:

$\mathfrak{Z}_{11}$ $\boxed{\mathfrak{G},\ x_a q_b,\ \Delta_0 + t x_a q_a}$ $(a \gtrless b,\ t \neq 0)$,

deren Gruppencharakter sich aus den Klammerelationen 3,20 des Anhangs ergibt.

In jedem Falle ergibt sich also unsere Gruppe $\mathfrak{Z}_{11}$ aus $\mathfrak{Z}_9$ durch Hinzufügung der Transformation $u(t) = \Delta_0 + t x_a q_a$.

b) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'$, Δ_0 *kommt in* $\mathfrak{Z}$ *vor.*

19. Dann erhalten wir zunächst die Gruppe:

$$\mathfrak{Z}_{12} \qquad \boxed{\mathfrak{G},\ x_a q_b,\ x_a q_a - x_b q_b, \Delta_0} \qquad (a \gtrless b),$$

deren Gruppencharakter sich aus den Klammerrelationen 3,18, 20 des Anhangs und den obigen Entwicklungen ergibt und die sicher in $\mathfrak{Z}$ als Untergruppe enthalten ist. *Wir behaupten nun, dass in diesem Falle* $\mathfrak{Z}$ *mit* $\mathfrak{Z}_{12}$ *identisch ist.*

In der Tat gilt, wegen $x_a q_a \equiv x_b q_b \pmod{\mathfrak{Z}_{12}}$,

$$V^* = E\Delta_0 + C\sum xq \equiv C\sum xq \equiv CNx_a q_a \pmod{\mathfrak{Z}_{12}}.$$

Daher muss $C = 0$ sein, und es ist

$$V^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{12}}.$$

Ferner gilt:

$$T^* = E'\Delta_0 + \sum_k C_k x_k q_k \equiv \sum_k C_k x_k q_k \equiv C' x_a q_a \pmod{\mathfrak{Z}_{12}},$$

wo $C' = \sum_k C_k$ ist. Daher muss $C' = 0$ sein, und es folgt

$$T^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{12}},$$

wie behauptet.

c) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^*$, Δ_0 *kommt in* $\mathfrak{Z}$ *nicht vor.*

20. In diesem Falle gibt es keine weiteren Gruppen $\mathfrak{Z}$.

In der Tat ist jetzt, wegen

$$x_a\, q_a \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}),$$

$$V^* = E\Delta_0 + C\sum xq \equiv E\Delta_0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}),$$

so dass $E = 0$ sein muss und daher

$$V^* \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}).$$

Ferner is

$$T^* = E'\Delta_0 + \sum_k C_k\, x_k\, q_k \equiv E'\Delta_0 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}),$$

und daher $E' = 0$, so dass

$$T^* \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}),$$

wie behauptet.

d) $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^*$, Δ_0 *kommt in* $\mathfrak{Z}$ *vor.*

21. Dann erhalten wir zunächst die Gruppe

$\mathfrak{Z}_{18}$ $\boxed{\mathfrak{G},\ x_a\, q_b\ ,\ \Delta_0}$ $\qquad (a \gtrless b),$

deren Gruppencharakter sich aus den Klammerrelationen 3,20 des Anhangs ergibt. Aus

$$V^* = E\Delta_0 + C\sum xq \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{13}),$$

$$T^* = E'\Delta_0 + \sum_k C_k\, x_k\, q_k \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{13})$$

folgt, dass in diesem Falle $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{Z}_{13}$ identisch ist.

22. Auf ganz analoge Weise erhalten wir im Falle I_2, für $W_{ab} = y_a\, p_b$ $(a \gtrless b)$ die analog gebauten Gruppen:

$\mathfrak{Z}_{11}^*$ $\boxed{\mathfrak{G}, y_a\, p_b\ ,\ \Delta_0 + t y_a\, p_a}$ $\qquad (a \gtrless b,\ t \neq 0)$

$\mathfrak{Z}_{12}^*$ $\boxed{\mathfrak{G},\ y_a\ p_b\ ,\ y_a\ p_a\ -y_b\ p_b\ ,\ \Delta_0}$ $(a \gtrless b)$,

$\mathfrak{Z}_{13}^*$ $\boxed{\mathfrak{G},\ y_a\ p_b\ ,\ \Delta_0}$ $(a \lessgtr b)$.

II$_1$. $W_{ab} = r\Delta_{ab} + tx_a\ q_b$ $(a \gtrless b)$; $r,t \neq 0$

23. — Wir dürfen offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ setzen. — Im Falle II$_1$ kommen in $\mathfrak{Z}$ Transformationen vom Typus V^*, (12,1) oder T^*, (11,1) vor, die weder in $\mathfrak{Z}_9$ noch in $\mathfrak{Z}_{10}$ stecken.

Es komme nun ein solches V^* vor. Aus der Formel (14,1) für $r = 1$, $s = 0$ ergibt sich, dass auch

$$V_{ab} = -tB\Delta_{ab} + 2By_a\ p_b + 2(tE - C)x_a\ q_b$$

in $\mathfrak{Z}$ vorkommen muss. Da dies nach Voraussetzung ein Vielfaches von W_{ab} sein muss, muss $B = 0$, und daher auch $2(tE - C) = 0$ sein, so dass $C = tE$ ist. V^* nimmt daher die Gestalt

$$V^* = E\sum_k(\Delta_{kk} + tx_k\ q_k) = E\sum_k W_{kk}$$

an. Daher ist, wegen $W_{aa} \equiv W_{bb}$ (mod $\mathfrak{Z}_9$),

$$V^* \equiv ENW_{aa} \quad (\text{mod } \mathfrak{Z}_9).$$

Wir sehen, dass entgegen der Voraussetzung

$$V^* \equiv 0 \quad (\text{mod } \mathfrak{Z}_{10})$$

ist.

24. Es komme nun ein $T^* \not\equiv 0$ (mod $\mathfrak{Z}_{10}$) in $\mathfrak{Z}$ vor. Wegen (13,1) folgt, dass

$$B_a - B_b = 0\ ,\quad C_a - C_b = t(E_a - E_b)$$

sein muss. Setzen wir $B_a = B_b = \ldots = B'$, so folgt ferner aus der Formel (15,1) für $r = 1$, $s=0$, $B_a = B_b = B'$, dass auch

$$T_{ab} = -tB' \Delta_{ab} + 2B' y_a p_b + [t (E_a + E_b) - (C_a + C_b)] x_a q_b$$

in $\mathfrak{Z}$ vorkommen muss, so dass $2B' = 0$ und daher auch $t (E_a + E_b) - (C_a + C_b) = 0$ sein muss.

Aus

$C_a - C_b = t (E_a - E_b)$, $\quad C_a + C_b = t (E_a + E_b)$

folgt aber für jedes a

$$C_a = t E_a ,$$

so dass T^* schliesslich die Gestalt

$$T^* = \sum_k E_k (\Delta_{kk} + t x_k q_k) = \sum_k E_k W_k$$

annimmt. Daher ist, entgegen der Voraussetzung,

$$T^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{10}},$$

und der Fall II_1 ist unmöglich.

Aus Symmetriegründen folgt, dass auch der Fall II_2 unmöglich ist.

III. $W_{ab} = s y_a p_b + t x_a q_b$

$(a \gtrless b)$; $s, t \neq 0$.

25. Wir dürfen offenbar $s = 1$ setzen. In diesem Falle müssten in $\mathfrak{Z}$ Transformationen vom Typus V^*, (12,1) oder T^*, (13,1) vorkommen, die weder in $\mathfrak{Z}_9$ noch in $\mathfrak{Z}_{10}$ stecken.

Nun folgt aus der Formel (14,1) für $r = 0$, $s = 1$,

$$V_{ab} = (C - tB) \Delta_{ab} - 2E y_a p_b + 2t E x_a q_b .$$

Da dies ein Vielfaches von W_{ab} sein muss, folgt: $C - tB = 0$, $C = tB$ und V_{ab} nimmt daher die Gestalt an:

$$V_{ab} = -2E(y_a p_b - t x_a q_b).$$

Wäre nun $E \neq 0$, so kämen auch die Transformationen $x_a q_b$, $y_a p_b$ in $\mathfrak{Z}$ einzeln vor, so dass $\mathfrak{Z}$ nach dem in § 1 Gesagten mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch wäre. Daher ist $E = 0$ und V^* nimmt die Gestalt an:

$$V^* = B \sum_k (y_k p_k + t x_k q_k) = B \sum_k W_{kk} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{10}}.$$

Für ein $T^* \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{10}}$ aber folgt, wegen (13,1), dass

$$E_a - E_b = 0, \quad C_a - C_b = t(B_a - B_b)$$

sein muss, da in $\mathfrak{Z}$ kein Paar linear unabhängiger Transformationen W_{ab} vorkommen darf. Die Koeffizienten E_k sind daher sämtlich untereinander gleich, $E_a = E_b = \ldots = E_k = E'$. Aus der Formel (15,1) für $r = 0$, $s = 1$, $E_a = E_b = E'$ folgt ferner, dass auch

$$T_{ab} = \tfrac{1}{2}[(C_a + C_b) - t(B_a + B_b)] \Delta_{ab} - 2E' y_a p_b + 2E' t x_a q_b$$

in $\mathfrak{Z}$ vorkommt. Da dies ein Vielfaches von W_{ab} sein muss, muss $(C_a + C_b) - t(B_a + B_b) = 0$ sein. T_{ab} nimmt daher die Gestalt

$$T_{ab} = -2E'(y_a p_b - t x_a q_b)$$

an. Hier muss $E' = 0$ sein, denn sonst würde $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{P}_{2N}$ identisch sein. Aus

$$C_a - C_b = t(B_a - B_b), \quad C_a + C_b = t(B_a + B_b)$$

folgt aber für jedes a $C_a = tB_a$ und T^* nimmt daher die Gestalt

$7^* = \sum_k B_k\,(y_k\,p_k + t x_k\,q_k) = \sum_k B_k\,W_{kk} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{10}}$

an. Daher ist auch III unmöglich.

IV. $W_{ab} = r\Delta_{ab} + s y_a\,p_b + t x_a\,q_b$ $(a \gtrless b)$; $r, s, t \neq 0$.

26. — Wir dürfen auch hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ setzen. — Wir behaupten nun, dass *im Falle IV* $st = -1$ *ist und die Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *zu einem von den beiden Typen*:

$$\mathfrak{Z}_{14}\left|\boxed{\mathfrak{G},\ W_{ab}(s), W_{aa}(s) - W_{bb}(s),\ nV_1^* + mV_2^*}\right| =$$

$$= \left|\boxed{\mathfrak{Z}_9\,(s),\ nV_1^* + mV_2^*}\right| \qquad (a \gtrless b)$$

bzw.

$$\mathfrak{Z}_{15}\left|\boxed{\mathfrak{G},\ W_{ab}(s),\ V_1^*,\ V_2^*}\right| = \left|\boxed{\mathfrak{Z}_9\,(s),\ V_1^*, V_2^*}\right| (a \gtrless b)$$

gehört, wo das Verhältniss der Parameter n, m für die Gruppe $\mathfrak{Z}_{14}$ charakteristisch ist. Hier bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} (1,4)\quad W_{ab}(s) &= \Delta_{ab} + s y_a\,p_b - \frac{1}{s}\,x_a\,q_b\,, \\ V_1^* &= \Delta_0 + 2s\,\textstyle\sum y p, \\ V_2^* &= \Delta_0 - \frac{2}{s}\,\textstyle\sum x q. \end{aligned}\right\} (s \neq 0)$$

Wegen $W_{aa}(s) \equiv W_{bb}(s) \pmod{\mathfrak{Z}_9\,(s)}$ ist auch:

$$(2,4)\qquad N W_{aa}(s) \equiv \sum_k W_{kk}(s) = \frac{1}{2}\sum_k (2\,\Delta_{kk} + 2\,s y_k\,p_k - \frac{2}{s}\,x_k\,q_k) = \frac{1}{2}\,(V_1^* + V_2^*) \pmod{\mathfrak{Z}_9\,(s)}.$$

Daher ist $\mathfrak{Z}_{10}(s)$ in $\mathfrak{Z}_{15}$ und für $n = m \neq 0$ in $\mathfrak{Z}_{14}$ enthalten.

Der Gruppencharakter der Gruppen $\mathfrak{Z}_{14}$, $\mathfrak{Z}_{15}$ ergibt sich aus den Klammerrelationen Nr. 35 des Anhangs, wenn man beachtet, dass V_1^*, V_2^* mit sämtlichen Transformationen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind. Wie die Gleichungen (9,1) (10,1) zeigen, sind in diesem Falle die Transformationen $W_{ab}(s)$ $(a \gtrless b)$ sämtlich miteinander vertauschbar. — Ferner ist offenbar jede Zwischengruppe zwischen $\mathfrak{Z}_9$ und $\mathfrak{Z}_{16}$ vom Typus $\mathfrak{Z}_{14}$. Es genügt daher zu beweisen, dass jede Transformation von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{Z}_{15}$ enthalten ist.

27. Es komme in $\mathfrak{Z}$ eine Transformation

$$V^* = E\Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{15})$$

vor. Aus der Formel (14,1) für $r = 1$ folgt, dass dann auch

$$V_{ab} = (sC - tB)\,\Delta_{ab} + 2\,(B - sE)\,y_a p_b + \\ + 2\,(tE - C)\,x_a q_b$$

in $\mathfrak{Z}$ vorkommt. Hier kann V_{ab} nicht identisch verschwinden, da dann $B = sE$, $C = tE$ und $V^* = E\sum_k W_{kk} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{10}}$ wäre.

Hieraus folgt zunächst, dass in V^* keine zwei Koeffizienten E, B, C zugleich Null sein können, da sonst V_{ab} kein Vielfaches von W_{ab} sein würde. Daraus ergibt sich übrigens, dass in $\mathfrak{Z}$ nicht mehr als ein Paar linear unabhängiger Transformationen vom Typus V^* vorkommen kann. Und aus demselben Grunde kann auch keiner der Koeffizienten $sC - tB$, $B - sE$, $tE - C$ von V_{ab} verschwinden, es sei denn, dass V_{ab} identisch Null ist. Ferner muss

$$(3,4)\quad \begin{cases} 2\,(B - sE) = s\,(sC - tB) = s^2\,C - stB, \\ 2\,(tE - C) = t\,(sC - tB) = stC - t^2\,B \end{cases}$$

gelten. Multiplizieren wir die erste Gleichung mit t, die zweite mit s und addieren, so ergibt sich

$$2\,(tB - sC) = 2st\,(sC - tB)$$

und daher, wegen $sC - tB \neq 0$,

$$st = -1.$$

Die Transformation W_{ab} nimmt daher die Gestalt (1,4) an. Ferner erhalten wir z. B. aus der ersten der Gleichungen (3,4), $t = -\frac{1}{s}$ gesetzt,

$$E = \frac{B}{2s} - \frac{sC}{2}$$

und daher schliesslich, $n = \frac{B}{2s}$, $m = -\frac{sC}{2}$ gesetzt,

$$V^* = \left(\frac{B}{2s} - \frac{sC}{2}\right) \Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq =$$

$$= \frac{B}{2s}\,(\Delta_0 + 2s\sum yp) - \frac{sC}{2}\,(\Delta_0 - \frac{2}{s}\sum xq) =$$

$$= nV_1^* + mV_2^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{15}}.$$

28. Es komme nun in $\mathfrak{Z}$ eine Transformation

$$T^* = \sum_k (E_k\,\Delta_{kk} + B_k\,y_k\,p_k + C_k\,x_k\,q_k) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{15}}$$

vor. Dann folgt zunächst aus (13,1), dass

$$B_a - B_b = s\,(E_a - E_b),\ C_a - C_b = t\,(E_a - E_b)$$

für jedes Wertepaar a,b gelten muss, oder

$$B_a - sE_a = B_b - sE_b = \ldots = F,$$
$$C_a - tE_a = C_b - tE_b = \ldots = G,$$

d. h.

(4,4) $\quad B_a = F + sE_a,\ C_a = G + tE_a$

für jedes a. Ferner folgt aus der Formel (15,1) für $r = 1$, wenn wir dort für B_a, B_b, C_a, C_b die aus (4,4) sich ergebenden Werte einsetzen, dass mit T^* auch

$$T_{ab} = \frac{1}{2}[s(C_a + C_b) - t(B_a + B_b)]\,\Delta_{ab} +$$
$$+ [(B_a + B_b) - s\,(E_a + E_b)]\,y_a p_b +$$
$$+ [t\,(E_a + E_b) - (C_a + C_b)]\,x_a q_b =$$
$$= (Gs - Ft)\,\Delta_{ab} + 2Fy_a p_b - 2Gx_a q_b$$

in $\mathfrak{Z}$ vorkommt. Und hier kann wiederum keiner der Koeffizienten $Gs - Ft$, $2F$, $-2G$ gleich Null sein, es sei denn, dass T_{ab} identisch Null ist. Aus $T_{ab} \equiv 0$ würde aber folgen

$$G = F = 0,\ B_a = sE_a,\ C_a = tE_a,$$
$$T^* = \sum_k E_k W_{kk} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{10}).$$

Ferner muss

(5,4) $\quad 2F = s\,(Gs - Ft),\ -2G = t\,(Gs - Ft)$

sein. Multiplizieren, wir die erste dieser Gleichungen mit t, die zweite mit s und addieren sie, so erhalten wir

$$-2\,(Gs - Ft) = 2st\,(Gs - Ft),$$

d. h., wegen $Gs - Ft \neq 0$,

$$st = -1, \quad t = -\frac{1}{s}.$$

Aus (3,4) folgt dann $G = \frac{F}{s^2}$. Setzen wir in T^*

$B_a = F + sE_a$, $C_a = \frac{F}{s^2} - \frac{1}{s}E_a$, so ergibt

sich, $\frac{F}{2s} = l$ gesetzt,

$$T^* = \sum_k E_k\,(\Delta_{kk} + sy_k\,p_k - \frac{1}{s}\,x_k\,q_k) + F\sum_k y_k\,p_k +$$

$$+ \frac{F}{s^2}\sum_k x_k\,q_k = \sum_k E_k\,W_{kk}\,(s) + l\,(2s\sum_k y_k\,p_k +$$

$$+ \frac{2}{s}\sum_k x_k\,q_k) = \sum_k E_k\,W_{kk}\,(s) + l\,(V_1^* - V_2^*).$$

Eine jede Transformation vom Typus T^* aus $\mathfrak{Z}$ ist daher in $\mathfrak{Z}_{15}$ enthalten, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

§ 5. Gruppen $\mathfrak{Z}$, die keine Transformationen von der Form $x_a\,p_b$, $y_a\,q_b$ $(a \gtrless b)$ und zwei (mod $\mathfrak{G}$) linear unabhängige Transformationen vom Typus W_{ab} $(a \gtrless b)$ enthalten.

29. Wir zeigen zunächst, dass in diesem Falle $\mathfrak{Z}$ keine Transformationen von der Form $x_a\,q_b$ oder $y_a\,p_b$ $(a \gtrless b)$ enthalten kann. Denn es möge etwa $x_a\,q_b$ in $\mathfrak{Z}$ vorkommen und es sei

$$W_{ab} = r\Delta^{ab} + sy_a p_b \qquad (a \gtrless b)$$

eine weitere von $x_a\, q_b$ unabhängige Transformation von Typus W_{ab} (man darf offenbar in W_{ab} $t = 0$ voraussetzen). Bilden wir für $a \neq d$ den Klammerausdruck

$$(W_{ab}, x_b\, q_d) = r x_a\, q_d + s y_a\, q_d ,$$

so folgt, da nach Nr. 3 mit $x_a\, q_b$ auch $x_a\, q_d$ in $\mathfrak{Z}$ vorkommt, dass, wenn $s \neq 0$ wäre, $y_a\, q_d$ und damit auch $x_a\, p_d$ in $\mathfrak{Z}$ vorkommen würden, entgegen der Annahme. Daher muss $s = 0$, und da nach Nr. 15 Δ_{ab} in $\mathfrak{Z}$ nicht isoliert vorkommt, auch $r = 0$ sein. Für $y_a\, p_b$ folgt das Gleiche aus Symmetriegründen.

30. Es seien nun

$$\begin{aligned} W'_{ab} &= r'\Delta_{ab} + s'y_a\, p_b + t'x_a\, q_b , \\ W''_{ab} &= r''\Delta_{ab} + s''y_a\, p_b + t''x_a\, q_b \end{aligned} \qquad (a \gtrless b)$$

ein Paar in Bezug auf $\mathfrak{G}$ linear unabhängiger Transformationen aus $\mathfrak{Z}$ vom Typus W_{ab}. In den linearen Kombinationen

$$\begin{aligned} t''W'_{ab} - t'W''_{ab} &= (t''r' - t'r'')\,\Delta_{ab} + \\ &\quad + (t''s' - t's'')\, y_a\, p_b , \\ s''W'_{ab} - s'W''_{ab} &= (s''r' - s'r'')\,\Delta_{ab} + \\ &\quad + (t\,s'' - t''s')\, x_a\, q_b \end{aligned}$$

kann weder $k_1 = t''r' - t'r''$ noch $k_2 = s''r' - s'r''$ gleich Null sein, denn sonst würde in $\mathfrak{Z}$ $y_a\, p_b$ bzw. $x_a\, q_b$ vorkommen. Wir dürfen daher in den obigen Ausdrücken durch k_1 bzw. k_2 durchdividieren und erhalten zwei Transformationen von der Gestalt:

$w'_{ab} = \Delta_{ab} + l y_a p_b$, $w''_{ab} = \Delta_{ab} + m x_a q_b$,
$(l \neq 0,\ m \neq 0)$.

31. Bilden wir nun den Klammerausdruck (s. Anh. 33):

$$(w'_{ab}, w''_{bd}) = g_{ad} + l y_a p_d + m x_a q_d + \\ + lm y_a q_d,$$

und addieren hierzu $-(w'_{ad} + w''_{ad}) = -(2\Delta_{ad} + l y_a p_d + m x_a q_d)$, so erhalten wir

$$g_{ad} - 2\Delta_{ad} + m l y_a q_d = -x_a p_d + (3 + lm) y_a q_d.$$

Daher muss

$$-1 = 3 + lm, \quad lm = -4$$

sein. Setzen wir $l = 2s$, $m = -\frac{2}{s}$, $s \neq 0$, so nehmen w'_{ab}, w''_{ab} die Gestalt

$$w'_{ab} = \Delta_{ab} + 2s\, y_a p_b$$

bzw.

$$w''_{ab} = \Delta_{ab} - \frac{2}{s} x_a q_b$$

an, und eine jede Transformation vom Typus W_{ab} aus $\mathfrak{Z}$ hat die Gestalt (h'_{ab}, h''_{ab} sind Konstanten):

(1,5) $$W_{ab} = h'_{ab} w'_{ab} + h''_{ab} w''_{ab}.$$

Ferner gelten die Klammerrelationen (s. Anh. 34):

(2,5) $(w'_{ab}, w''_{bd}) \equiv w'_{ad} + w''_{ad}$ (mod $\mathfrak{G}$) $(a \neq d)$,

(3,5) $(w'_{ab}, w''_{ba}) \equiv w'_{aa} + w'_{bb} + w''_{aa} + w''_{bb}$ (mod $\mathfrak{G}$) $(a \gtrless b)$.

Daraus, aus (6,1), (7,1), (8,1), (9,1), (10,1) und den Relationen 26 und 34 des Anhangs folgt, für r, s, t in W_{ab}: 1, $2s$, 0 bzw. 1, 0, $-\frac{2}{s}$ gesetzt, der Gruppencharakter der Gruppe:

$\mathfrak{Z}_{16}$ | $\mathfrak{G}$, w'_{ab}, w''_{ab}, $w'_{aa} - w'_{bb}$, $w''_{aa} - w''_{bb}$, $w'_{aa} + w''_{aa}$ | $(a \gtrless b)$

und der sie umfassenden Gruppe:

$\mathfrak{Z}_{17}$ | $\mathfrak{G}$, w'_{ab}, w''_{ab} | $(a \gtrless b)$

32. Es sei nun $\mathfrak{Z}$ weder vom Typus $\mathfrak{Z}_{16}$ noch vom Typus $\mathfrak{Z}_{17}$. Dann enthält $\mathfrak{Z}$ nach dem Obigen, wegen (7,1) und (2,5), auf jeden Fall die Untergruppe $\mathfrak{Z}_{16}$, dann aber noch Transformationen vom Typus V^*, die nicht von der Gestalt $\sum_k (w'_{kk} + w''_{kk}) = V_1^* + V_2^*$ sind, mit $V_1^* = \Delta_0 + 2s\sum yp$, $V_2^* = \Delta_0 - \frac{2}{s}\sum xq$, oder solche vom Typus T^*, die nicht von der Gestalt $\sum_k C'_k w'_{kk} + \sum_k C''_k w''_{kk}$ ($\sum_k C'_k = 0$, $\sum_k C''_k = 0$) sind, oder Transformationen beider Typen.

Es komme zunächst eine Transformation

$$V^* = E\Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq$$

in $\mathfrak{Z}$ vor. Dann folgt aus der Formel (14,1), wo in W_{ab} für r, s, t bzw. das einemal 1,2s,0, das anderemal 1,0, $-\frac{2}{s}$ zu setzen ist:

$$(4,5)\quad \begin{cases} (V^*, w'_{ab}) = 2sC\Delta_{ab} + 2(B - 2sE)\, y_a\, p_b - \\ \qquad\qquad - 2Cx_a\, q_b\,, \\ (V^*, w''_{ab}) = \dfrac{2}{s}\, B\Delta_{ab} + 2By_a\, p_b - \\ \qquad\qquad -2\left(\dfrac{2E}{s} + C\right)x_a\, q_b\,. \end{cases}$$

Und hieraus folgt zunächst, dass kein Paar der Koeffizienten E, B, C gleich Null sein kann, denn sonst käme in $\mathfrak{Z}$ $x_a\, q_b$ oder $y_a\, p_b$ vor. Speziell also kann auch Δ_0 in $\mathfrak{Z}$ nicht vorkommen.

33. Wir dürfen ferner $B + Cs^2 \neq 0$ annehmen. Denn ist $B + Cs^2 = 0$, $B = -Cs^2$, so nimmt V^* die Gestalt an:

$$V^* = E\Delta_0 - \frac{Cs}{2}\,(2s\sum yp - \frac{2}{s}\sum xq) = E\Delta_0 -$$

$$- \frac{Cs}{2}\,(V_1^* + V_2^* - 2\Delta_0) = (E + Cs)\,\Delta_0 -$$

$$- \frac{Cs}{2}\,(V_1^* + V_2^*).$$

Nun ist aber

$$V_1^* + V_2^* = \sum(w'_{kk} + w''_{kk}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{16}).$$

Also wäre, da $\mathfrak{Z}_{16}$ in $\mathfrak{Z}$ enthalten ist,

$$V^* \equiv (E + Cs)\Delta_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}).$$

Da aber Δ_0 nach dem soeben Bemerkten in $\mathfrak{Z}$ nicht vorkommen kann, müsste $E + Cs = 0$ sein, und V^* nimmt die Gestalt

$$V^* = -\frac{Cs}{2}\,(V_1^* + V_2^*) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{Z}_{16})$$

an, was der Annahme über V^* widerspricht.

34. Multiplizieren wir nun die erste der Gleichungen (4,5) mit $\frac{B}{s}$, die zweite mit $-Cs$ und addieren sie, so erhalten wir

$$2\left(\frac{B^2}{s} - 2EB - BCs\right) y_a p_b -$$

$$-2\left(\frac{BC}{s} - 2EC - C^2 s\right) x_a q_b ,$$

und da dies eine Transformation vom Typus W_{ab} ist, sich daher linear aus w'_{ab}, w''_{ab} zusammensetzen lassen muss, andererseits aber in ihr Δ_{ab} nicht enthalten ist, muss sie ein Vielfaches von

$$w'_{ab} - w''_{ab} = 2s y_a p_b + \frac{2}{s} x_a q_b$$

sein d. h. es muss

$$\frac{B^2}{s} - 2EB - BCs = -s^2\left(\frac{BC}{s} - 2EC - C^2 s\right)$$

oder

$$B^2 - 2EBs = 2ECs^3 + C^2 s^4$$

oder schliesslich

$$B^2 - C^2 s^4 = (B - Cs^2)(B + Cs^2) =$$
$$= 2Es(B + Cs^2)$$

sein. Wegen $B + Cs^2 \neq 0$ folgt

$$B - Cs^2 = 2Es$$

oder

$$E = \frac{B}{2s} - \frac{Cs}{2}.$$

35. Für diesen Wert von E geht V^* über in

$$V^* = \frac{B}{2s}(\Delta_0 + 2s\sum yp) - \frac{Cs}{2}\left(\Delta_0 - \frac{2}{s}\sum xq\right) =$$

$$= n_1 V_1^* + n_2 V_2^*$$

mit $n_1 = \frac{B}{2s}$, $n_2 = -\frac{Cs}{2}$. Hier ist $n_1 \neq n_2$, da sonst $V^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{16}}$ wäre. Dann aber kommen V_1^*, V_2^* in $\mathfrak{Z}$ vor. Daher ist, wegen $V_1^* = \sum_k w'_{kk}$, $V_2^* = \sum_k w''_{kk}$, $\mathfrak{Z}_{17}$ in $\mathfrak{Z}$ und V^* in $\mathfrak{Z}_{17}$ enthalten.

Es sei nun $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{Z}_{16}$ und $\mathfrak{Z}_{17}$ verschieden, und es komme

$$T^* = \sum_k (E_k \Delta_{kk} + B_k y_k p_k + C_k x_k q_k) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}_{16}}$$

in $\mathfrak{Z}$ vor. Dann muss, wegen (13,1) und (1,5),

$$(T^*, g_{ab}) = (E_a - E_b)\Delta_{ab} + (B_a - B_b) y_a p_b + (C_a - C_b) x_a q_b = h'_{ab} w'_{ab} + h''_{ab} w''_{ab} =$$

$$= (h'_{ab} + h''_{ab})\Delta_{ab} + 2sh'_{ab} y_a p_b - \frac{2h''_{ab}}{s} x_a q_b$$

sein, d. h.

$$E_a - E_b = h'_{ab} + h''_{ab},\quad B_a - B_b = 2sh'_{ab},$$

$$C_a - C_b = -\frac{2h''_{ab}}{s}.$$

Aus den beiden letzten Relationen folgt

$$\frac{B_a - B_b}{2s} - \frac{C_a - C_b}{2}s = h'_{ab} + h''_{ab},$$

daher

$$E_a - E_b = \frac{B_a - B_b}{2s} - \frac{C_a - C_b}{2}s$$

oder

$$E_a - \frac{B_a}{2s} + \frac{C_a s}{2} = E_b - \frac{B_b}{2s} + \frac{C_b s}{2} = \ldots = G$$

für jeden Wert des Index a. Setzen wir in T^*

$$E_k = G + \frac{B_k}{2s} - \frac{C_k s}{2}$$

ein, so erhalten wir

$$T^* = G\Delta_0 + \frac{1}{2s}\sum_k B_k(\Delta_{kk} + 2sy_k p_k) -$$

$$- \frac{s}{2}\sum_k C_k\left(\Delta_{kk} - \frac{2}{s}x_k q_k\right) = G\Delta_0 + \frac{1}{2s}\sum_k B_k w'_{kk} -$$

$$- \frac{s}{2}\sum_k C_k w''_{kk}.$$

Wegen $w'_{aa} + w''_{aa} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Z}^{16}}$, ist daher, $\frac{B_k}{2s} + \frac{C_k s}{2} = F_k$ gesetzt,

$$T^* \equiv G\Delta_0 + \sum_k F_k w'_{kk} \pmod{\mathfrak{Z}^{16}},$$

und schliesslich, wegen $w'_{aa} \equiv w'_{bb} \pmod{\mathfrak{Z}^{16}}$,

$$T^* \equiv G\Delta_0 + w'_{aa}\sum_k F_k \pmod{\mathfrak{Z}^{16}}.$$

Klammern wir nun den Ausdruck $G\Delta_0 + w'_{aa}\sum_k F_k$ z. B. mit w'_{bc}, $b \neq a$, $c \neq a$, so folgt (s. Anh. 36):

$$(G\Delta_0 + w'_{aa}\sum_k F_k, w'_{bc}) = (G\Delta_0, w'_{bc}) =$$

$$= -4sGy_b p_c.$$

Daher muss $G \equiv 0$ sein, und es gilt:

$$T^* \equiv w'_{aa} \sum_k F_{kk} \qquad (\text{mod } \mathfrak{Z}_{16}).$$

Wäre daher $\sum_k F_k \equiv 0$ so müsste T^* in $\mathfrak{Z}_{16}$ enthalten sein entgegen der Annahme. Daher ist $\sum_k F_k \not\equiv 0$, so dass w'_{aa} und daher $\mathfrak{Z}_{17}$ in $\mathfrak{Z}$ und unser T^* in $\mathfrak{Z}_{17}$ enthalten ist.

Somit sehen wir, dass wenn $\mathfrak{Z}$ die Gruppe $\mathfrak{Z}_{16}$ enthält, aber von ihr verschieden ist, alle in $\mathfrak{Z}$ darüber hinaus vorkommenden Transformationen in $\mathfrak{Z}_{17}$ enthalten sind, so dass $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{Z}_{17}$ identisch ist.

Anhang.

A. Bezeichnungen.

$$g_{ab} = x_a p_b + y_a q_b\,, \quad \Delta_{ab} = x_a p_b - y_a q_b\,, \quad (a \gtrless b);$$

$$X_o = \sum_{k=1}^{N} x_k p_k\,, \quad Y_o = \sum_{k=1}^{N} y_k q_k\,;$$

$$S_o = X_o + Y_o\,, \quad \Delta_o = X_o - Y_o\,.$$

B. Explizite Klammerrelationen.

Führen wir das Symbol ein:

$$i_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ wenn } m = n\,; \\ 0 \text{ wenn } m \neq n, \end{cases}$$

so gilt:

I. $(x_a p_b\,,\ x_c p_d) = i_{cb} x_a p_d - i_{ad} x_c p_b\,;$

II. $(y_a q_b\,;\ y_c q_d) = i_{cb} y_a q_d - i_{ad} y_c q_b\,;$

III. $(x_a q_b\,,\ y_c p_d) = i_{cb} x_a p_d - i_{ad} y_c q_b\,;$

IV. $(x_a q_b\,,\ y_c q_d) = i_{cb} x_a q_d\,;$

V. $(y_a p_b\,,\ x_c p_d) = i_{cb} y_a p_d\,;$

VI. $(x_a\, q_b\,,\ x_c\, p_d) = -\, i_{ad} x_c\, q_b$;

VII. $(y_a\, p_b\,,\ y_c\, q_d) = -\, i_{ad} y_c\, p_b$;

VIII. $(x_a\, p_b\,,\ y_c\, q_d) = 0$.

Daraus leiten wir die folgenden Klammerrelationen ab:

1. $(x_a\, p_b\,,\ g_{cd}) = (x_a\, p_b\,,\ x_c\, p_d) = i_{cb} x_a\, p_d - - i_{ad} x_c\, p_b$;

2. $(y_a\, q_b\,,\ g_{cd}) = (y_a\, q_b\,,\ y_c\, q_d) = i_{cb} y_a\, q_d - - i_{ad} y_c\, q_b$;

3. $(x_a\, q_b\,,\ g_{cd}) = (x_a\, q_b\,,\ x_c\, p_d) + (x_a\, q_b\,,\ y_c\, q_d) = = i_{cb} x_a\, q_d - i_{ad} x_c\, q_b$;

4. $(y_a\, p_b\,,\ g_{cd}) = i_{cb} y_a\, p_d - i_{ad} y_c\, p_b$;

5. $(x_a\, p_b\,,\ \Delta_{cd}) = (x_a\, p_b\,,\ x_c\, p_d) = i_{cb} x_a\, p_d - - i_{ad} x_c\, p_b$;

6. $(y_a\, q_b\,,\ \Delta_{cd}) = (y_a\, q_b\,,\ -\ y_c\, q_d) = = - i_{cb} y_a\, q_d + i_{ad} y_c\, q_b$;

7. $(x_a\, q_b\,,\ \Delta_{cd}) = (x_a\, q_b\,,\ x_c\, p_d) - (x_a\, q_b\,,\ y_c\, q_d) = = - i_{cb} x_a\, q_d - i_{ad} x_c\, q_b$;

8. $(y_a\, p_b\,,\ \Delta_{cd}) = (y_a\, p_b\,,\ x_c\, p_d) - (y_a\, p_b\,,\ y_c\, q_d) = = i_{cb} y_a\, p_d + i_{ad} y_c\, p_b$;

9. $(g_{ab},\ g_{cd}) = (x_a\, p_b\,,\ x_c\, p_d) + (y_a\, q_b\,,\ y_c\, q_d) = = i_{cb} g_{ad} - i_{ad} g_{cb}$;

10. $(\Delta_{ab},\ \Delta_{cd}) = (x_a\, p_b - y_a\, q_b\,,\ x_c\, p_d - y_c\, q_d) = = (x_a\, p_b\,,\ x_c\, p_d) + (y_a\, q_b\,,\ y_c\, q_d) = = i_{cb} g_{ad} - i_{ad} g_{cb}$;

11. $(\Delta_{ab}, g_{cd}) = (x_a p_b - y_a q_b, x_c p_d + y_c q_d) =$
$= (x_a p_b, x_c p_d) - (y_a q_b, y_c q_d) =$
$= i_{cb}\ \Delta_{ad} - i_{ad}\ \Delta_{cb}$;

12. $(\sum x_k p_k, \sum x_k q_k) = \sum (x_k p_k, x_k q_k) =$
$= \sum x_k q_k$;

13. $(\sum y_k q_k, \sum y_k p_k) = \sum (y_k q_k, y_k p_k) =$
$= \sum y_k q_k$;

14. $(\sum x_k q_k, \sum y_k q_k) = \sum (x_k q_k, y_k q_k) =$
$= \sum x_k q_k$;

15. $(\sum y_k p_k, \sum x_k p_k) = \sum (y_k p_k, x_k p_k) =$
$= \sum y_k p_k$;

16. $(\sum x_k q_k, \sum y_k p_k) = \sum (x_k q_k, y_k p_k) =$
$= \sum (x_k p_k - y_k q_k) = X_o - Y_o = \Delta_o$;

17. $(x_a p_b, S_o) = (x_a p_b, X_o) = (x_a p_b, \sum x_k p_k) =$
$= 0$;

18. $(x_a p_b, \Delta_o) = (x_a p_b, X_o) = 0$; $(X_o, g_{ab}) =$
$= 0$;

19. $(y_a q_b, S_o) = (y_a q_b, \Delta_o) = 0$; $(Y_o, g_{ab}) =$
$= 0$;

20. Für $a \gtrless b$: $(x_a q_b, \Delta_o) = (x_a q_b, \sum x_k p_k) -$
$- (x_a q_b, \sum y_k q_k) = (x_a q_b, x_a p_a + x_b p_b) -$
$- (x_a q_b, y_a q_a + y_b q_b) = (x_a q_b, x_a p_a) +$
$+ (x_a q_b, x_b p_b) - (x_a q_b, y_a q_a) -$
$- (x_a q_b, y_b q_b) = -2 x_a q_b$. Analog ist:

$$(X_o , x_a q_b) = (x_a q_b , Y_o) = x_a q_b ;$$

21. Für $a \gtrless b$: $(Y_a p_b , \Delta_o) = 2y_a p^b$; $(Y_o , y_a p_b) = (y_a p_b , X_o) = y_a p_b$;

22. $(g_{ab} , \sum x_k q_k) = (g_{ab} , \sum y_k p_k) = 0.$

C. Herleitung einiger wichtiger Klammerrelationen des Textes.

24. Ist

$$S_{ab} = A_{ab} x_a p_b + B_{ab} y_a p_b + C_{ab} x_a q_b + D_{ab} y_a q_b ,$$

so gilt, wegen 1, 2, 3 und 4:

$$(S_{ab} , g_{cd}) = A_{ab} (x_a p_b , g_{cd}) + B_{ab} (y_a p_b , g_{cd}) + C_{ab} (x_a q_b , g_{cd}) + D_{ab} (y_a q_b , g_{cd}) = A_{ab} (i_{cb} x_a p_d - i_{ad} x_c p_b) + B_{ab} (i_{cb} y_a p_d - i_{ad} y_c p_b) + C_{ab} (i_{cb} x_a q_d - i_{ad} x_c q_b) + D_{ab} (i_{cb} y_a q_d - i_{ab} y_c q_b) = i_{cb} [A_{ab} x_a p_d + B_{ab} y_a p_d + C_{ab} x_a q_d + D_{ab} y_a q_d] - i_{ad} [A_{ab} x_c p_b + B_{ab} y_c p_b + C_{ab} x_c q_b + D_{ab} y_c q_b].$$

25. Insbesondere erhält man für

$$W_{ab} = r \Delta_{ab} + s y_a p_b + t x_a q_b ,$$

wegen 3, 4 und 11:

$$(W_{ab} , g_{cd}) = i_{cb} [r \Delta_{ad} + s y_a p_d + t x_a q_d] - i_{ad} [r \Delta_{cb} + s y_c p_b + t x_c q_b].$$

26. $(W_{ab} , W_{cd}) = (r \Delta_{ab} + s y_a p_b + t x_a q_b , r \Delta_{cd} + s y_c p_d + t x_c q_d) = r^2 (\Delta_{ab} , \Delta_{cd}) + rs (\Delta_{ab} , y_c p_d) + rt (\Delta_{ab} , x_c q_d) +$

$$+ rs(y_a p_b , \Delta_{cd}) + st(y_a p_b , x_c q_d) +$$
$$+ rt(x_a q_b , \Delta_{cd}) + st(x_a q_b , y_c p_d) =$$
$$= r^2(i_{cb} g_{ad} - i_{ad} g_{cb}) - rs(i_{ad} y_c p_b +$$
$$+ i_{cb} y_a p_d) + rt(i_{ad} x_c q_b + i_{cb} x_a q_d) +$$
$$+ rs(i_{cb} y_a p_d + i_{ad} y_c p_b) + st(i_{cb} y_a q_d -$$
$$- i_{ad} x_c p_b) - rt(i_{cb} x_a q_d + i_{ad} x_c q_b) +$$
$$+ st(i_{cb} x_a p_d - i_{ad} y_c q_b) =$$
$$= (r^2 + st)(i_{cb} g_{ad} - i_{ad} g_{cb}),$$

so dass schliesslich wird:

$$(W_{ab}, W_{cd}) = (r^2 + st)(i_{cb} g_{ad} - i_{ad} g_{cb}).$$

27. Wegen 24 ist für $g_j \neq 0$:

$$(\sum_{k=1}^{N} k g_{kk}, \sum_{m-n=g_j} S_{mn}) = \sum_{m-n=g_j} (m g_{mm} + n g , S_{mn}) =$$
$$= \sum_{m-n=g_j} [(m g_{mm}, S_{mn}) + (n g_{nn}, S_{mn})] =$$
$$= \sum_{m-n=g_j} [m S_{mn} - n S_{mn}] = \sum_{m-n=g_j} (m-n) S_{mn} =$$
$$= g_j P g_j .$$

28. $(T, g_{ab}) = ((A_a x_a p_a + B_a y_a p_a + C_a x_a q_a +$
$+ D_a y_a q_a) + (A_b x_b p_b + B_b y_b p_b +$
$+ C_b x_b q_b + D_b y_b q_b), g_{ab}) =$
$= A_a (x_a p_a , g_{ab}) + B_a (y_a p_a , g_{ab}) +$
$+ C_a (x_a q_a , g_{ab}) + D_a (y_a q_a , g_{ab}) +$
$+ A_b (x_b p_b , g_{ab}) + B_b (y_b p_b , g_{ab}) +$
$+ C_b (x_b q_b , g_{ab}) + D_b (y_b q_b , g_{ab}) =$
$= (A_a - A_b) x_a p + (B_a - B_b) y_a p_b +$
$+ (C_a - C_b) x_a q_b + (D_a - D_b) y_a q_b .$

Hieraus beweist man die Relation (13,1) durch Spezialisierung.

29. Wir beweisen die Formel (15.1), da (14,1) aus ihr durch Gleichsetzung der Koeffizienten E_a bzw. B_a bzw. C_a untereinander hervorgeht, wenn der in der Fussnote 7 angegebene Wert von u beachtet wird. Es sei zuerst $a \gtrless b$.

$$(T^*, W_{ab}) = ((E_a \Delta_{aa} + B_a y_a p_a + C_a x_a q_a) + (E_b \Delta_{bb} + B_b y_b p_b + C_b x_b q_b), W_{ab}) = E_a(\Delta_{aa}, W_{ab}) + B_a(y_a p_a, W_{ab}) + C_a(x_a q_a, W_{ab}) + E_b(\Delta_{bb}, W_{ab}) + B_b(y_b p_b, W_{ab}) + C_b(x_b q_b, W_a).$$

Nun ist:

$$(\Delta_{aa}, W_{ab}) = (x_a p_a - y_a q_a, r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b) = r(x_a p_b + y_a q_b) - sy_a p_b + tx_a q_b = rg_{ab} - sy_a p_b + tx_a q_b;$$

$$(\Delta_{bb}, W_{ab}) = -(W_{ab}, \Delta_{bb}) = -(r\Delta_b + sy_a p_b + tx_a q_b, x_b p_b - y_b q_b) = -rg_{ab} - sy_a p_b + tx_a q_b;$$

$$(y_a p_a, W_{ab}) = (y_a p_a, r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b) = ry_a p_b + ty_a q_b;$$

$$(y_b p_b, W_{ab}) = -(W_{ab}, y_b p_b) = -(r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b, y_b p_b) = ry_a p_b - tx_a p_b;$$

$$(x_a q_a ; W_{ab}) = (x_a q_a , r\Delta_{ab} + s y_a p_b + t x_a q_b) = - r x_a q_b + s x_a p_b ;$$

$$(x_b q_b , W_{ab}) = - (W_{ab}, x_b q_b) = - - (r\Delta_{ab} + s y_a p_b + t x_a q_b , x_b q_b) = = - r x_a q_b - s y_a q_b .$$

Setzen wir dies in die obige Formel ein, so erhält man:

$$(T^*, W_{ab}) = r(E_a - E_b) g_{ab} + M x_a p_b - - N y_a q_b + [r(B_a + B_b) - s(E_a + + E_b)] y_a p_b + [t(E_a + E_b) - r(C_a + C_b)] x_a q_b$$

wo $M = (sC_a - tB_b)$, $N = (sC_b - tB_a)$ ist.

Daher gilt:

$$(T^*, W_{ab}) = \frac{1}{2} (M + N)\Delta_{ab} + [r(B_a + + B_b) - s(E_a + E_b)] y_a p_b + [t(E_a + E_b) - - r(C_a + C_b)] x_a q_b + \left[\frac{1}{2} (M - N) + r(E_a - - E_b)\right] g_{ab},$$

und dies ist die Formel (15,1).

Für a = b aber gilt, wegen III, 7, 8:

$$(T^*, W_{aa}) = (E_a \Delta_{aa} + B_a y_a p_a + + C_a x_a q_a , r\Delta_{aa} + s y_a p_a + t x_a q_a) = = sE_a (\Delta_{aa}, y_a p_a) + tE_a (\Delta_{aa}, x_a q_a) + + rB_a (y_a p_a , \Delta_{aa}) + tB_a (y_a p_a , x_a q_a) + + rC_a (x_a q_a , \Delta\ ) + sC_a (x_a q_a , y_a p_a) =$$

$$=(sC_a - tB_a)(x_a q_a, y_a p_a) + (rB_a - sE_a)(y_a p_a, \Delta_{aa}) + (tE_a - rC_a)(\Delta_{aa} x_a q_a) =$$
$$=(sC_a - tB_a)\Delta_{aa}\, 2(rB_a - sE_a) y_a p_a + 2(tE_a - rC_a) x_a q_a .$$

30. $$(V^*, \sum xq) = (E\Delta_0 + B\sum yp + C\sum xq, \sum xq) =$$
$$= E'\Delta_0, \sum xq) + B(\sum yp, \sum xq) =$$
$$= E(\sum xp - \sum yq, \sum xq) + B\sum yq -$$
$$- B\sum xp = E\sum xq - B\Delta_0 .$$

31. $$(v_1, v_2) = (\Delta_0 + r\sum yp, \Delta_0 + s\sum xq) =$$
$$= (\Delta_0, s\sum xq) + (r\sum yp, \Delta_0) +$$
$$+ (r\sum yp, s\sum xq) = (\sum xp - \sum yq, s\sum xq) +$$
$$+ (r\sum yp, \sum xp - \sum yq) - rs\Delta_0 =$$
$$= 2s\sum xq + 2r\sum yp - rs\Delta_0 .$$

32. $$(V^{*\prime}, x_a p_b) = (B\sum yp + C\sum xq, x_a p_b) =$$
$$= B(\sum yp, x_a p_b) + C(\sum xq, x_a p_b) =$$
$$= By_a p_b - Cx_a q_b .$$

Analog leitet man die zweite Relation her.

33. $$(w'_{ab}, w''_{bd}) = (\Delta_{ab} + ly_a p_b, \Delta_{bd} + mx_b q_d) =$$
$$= (x_a p_b - y_a q_b + ly_a p_b, x_b p_d - y_b q_d +$$
$$+ mx_b q_d) = (x_a p_b, x_b p_d) + (x_a p_b, mx_b q_d) +$$
$$+ (y_a q_b, y_b q_d) + (ly_a p_b, x_b p_d) +$$
$$+ (ly_a p_b, mx_b q_d) = g_{ad} + mx_a q_d +$$
$$+ ly_a p_d + lmy_a q_d . \qquad (a \neq d).$$

34. $(w'_{ab}\ w''_{cd}) = (x_a\ p_b - y_a\ q_b + 2s y_a\ p_b\ ,\ x_c\ p_d -$

$- y_c\ q_d - \frac{2}{s} x_c\ q_d) = (x_a\ p_b\ ,\ x_c\ p_d) -$

$- \frac{2}{s} (x_a\ p_b\ ,\ x_c\ q_d) + (y_a\ q_b\ ,\ y_c\ q_d) +$

$+ \frac{2}{s} (y_a\ q_b\ ,\ x_c\ q_d) + 2s\ (y_a\ p_b\ ,\ x_c\ p_d) -$

$- 2s\ (y_a\ p_b\ ,\ y_c\ q_d) - 4\ (y_a\ p_b\ ,\ x_c\ q_d) =$

$= (i_{cb}\ x_a\ p_d - i_{ad}\ x_c\ p_b) - \frac{2}{s}\ i_{cb}\ x_a\ q_d +$

$+ (i_{cb}\ y_a\ q_d - i_{ad}\ y_c\ q_b) - \frac{2}{s}\ i_{ad}\ x_c\ q_b +$

$+ 2s i_{cb}\ y_a\ p_d + 2s i_{ad}\ y_c\ p_b - 4\ (i_{cb}\ y_a\ q_d -$

$- i_{ad}\ x_c\ p_b) = i_{cb}\ g_{ad} - i_{ad}\ g_{cb} +$

$+ i_{cb}\ (2s\ y_a\ p_d - \frac{2}{s} x_a\ q_d) + i_{ad}(2s y_c\ p_b -$

$- \frac{2}{s}\ x_c\ q_b) - 4\ (i_{cb}\ y_a\ q_d - i_{ad}\ x_c\ p_b) \equiv$

$\equiv i_{cb}(w'_{ad} + w''_{ad}) + i_{ad}(w'_{cb} + w''_{cb}) (\mathrm{mod}\,\mathfrak{G})$

35. $(V_1{}^*,\ V_2{}^*) = 2\ (V_1{}^* + V_2{}^*);$ $(a \lesseqgtr b).$

$(V_1{}^*,\ W_{ab}(s)) = 2\Delta_{ab} + 2s y_a\ p_b -$

$- \frac{2}{s} x_a\ q_b = 2W_{ab}(s)\ ,$

$(V{}^*,\ W_{ab}(s)) = -2\Delta_{ab} - 2s y_a\ p_b +$

$+ \frac{2}{s} x_a\ q_b = -2W_{ab}(s).$

Diese Formeln ergeben sich aus (14,1) durch Spezialisierung.

36. $(\Delta_o\ ,\ w'_{bc}) = (\sum xp - \sum yq,\ \Delta_{bc} + 2s y_b\ p_c) =$

$= (\sum xp,\ \Delta_{bc}) - (\sum yq,\ \Delta_{bc}) +$

$+ 2s\ (\sum xp,\ y_b\ p_c) - 2s\ (\sum yq,\ y_b\ p_c) =$

$= -4s y_b\ p_c\ .$

Übersicht über die aufgestellten Gruppen.

$\mathfrak{Z}_1$ $\boxed{\mathfrak{G},\ l\Delta_0 + m\sum yp + n\sum xq}$;

$\mathfrak{Z}_2$ $\boxed{\mathfrak{G},\ \Delta_0 + 2t\sum yp,\ \Delta - \frac{2}{t}\sum xq}$;

$\mathfrak{Z}_3$ $\boxed{\mathfrak{G}\ \sum xp,\ \sum yq,\ \sum xq,\ \sum yp}$;

$\mathfrak{Z}_4$ $\boxed{\mathfrak{G}\ \sum xp,\ \sum yq\ \sum xq}$; $\mathfrak{Z}_5$ $\boxed{\mathfrak{G},\ \sum xp\ \sum yq, \sum yp}$;

$\mathfrak{Z}_6$ $\boxed{\mathfrak{G}.\ \sum xp\ \sum yq}$;

$\mathfrak{Z}_7$ $\boxed{x_a p_b\ ,\ y_a q_b \quad x_a q_b}$; $\mathfrak{Z}_8$ $\boxed{{}^t x_a p_b\ ,\ y_a q_b\ ,\ y_a p_b}$;

$\mathfrak{G}'$ $\boxed{x_a p_b\ ,\ y_a q_b}$;

$\mathfrak{Z}_9$ $\boxed{\mathfrak{G},\ W_{ab},\ W_{aa} - W_{bb}}'$ *); $\mathfrak{Z}_{10}$ $\boxed{\mathfrak{G}\ W}$;

$\mathfrak{Z}_{11}$ $\boxed{\mathfrak{G},\ x_a q_b \quad \Delta_0 + t x_a q_a}'$ $\mathfrak{Z}_{11}^*$ $\boxed{\mathfrak{G}.y_a p_b\ ,\ \Delta_0 + t y_a p_a}'$

$\mathfrak{Z}_{12}$ $\boxed{\mathfrak{G}\ \ x_a q_b\ ,\ x_a q_a - x_b q_b\ ,\ \Delta_0}'$;

$\mathfrak{Z}_{12}^*$ $\boxed{\mathfrak{G},\ y_a p_b\ ,\ y_a p_a - y_b p_b\ ,\ \Delta_0}'$;

$\mathfrak{Z}_{13}$ $\boxed{\mathfrak{G},\ x_a q_b\ ,\ \Delta_0}$; $\mathfrak{Z}_{13}'$ $\boxed{\mathfrak{G},\ y_a p_b\ ,\ \Delta_0}$;

---

*) Der Strich bedeutet: $a \gtrless b$. Sonst gilt $a \lesseqgtr b$.

$$\mathfrak{Z}_{14}\quad \left|\overline{\mathfrak{G}, W_{ab}(s),\ W_{aa}(s) - W_{bb}(s),\ nV_1{}^* + mV_2{}^*}\right|' ;$$

$$\mathfrak{Z}_{15}\quad \left|\overline{\mathfrak{G},\ W_{ab}(s),\ V_1{}^*,\ V_2{}^*}\right| ;$$

$$\mathfrak{Z}_{16}\quad \left|\overline{\mathfrak{G},\ w'_{ab},\ w''_{ab},\ w'_{aa} - w'_{bb},\ w''_{aa} - w''_{bb}\ w'_{aa} + w''_{aa}}\right|' ;$$

$$\mathfrak{Z}_{17}\quad \left|\overline{\mathfrak{G},\ w'_{ab},\ w''_{ab}}\right| .$$

Hier bedeuten:

$$W_{ab} = r\Delta_{ab} + sy_a p_b + tx_a q_b ,$$

$$W_{ab}(s) = \Delta_{ab} + sy_a p_b - \frac{1}{s} x_a q_b ;$$

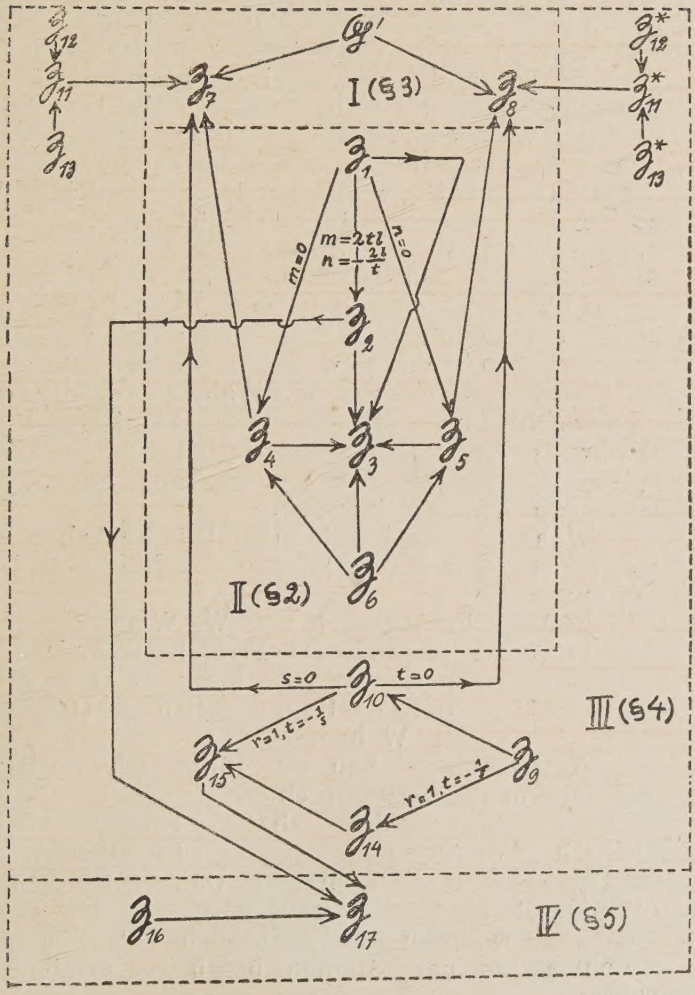
$$V_1{}^* = \Delta_0 + 2s\sum vp, V_2{}^* = \Delta_0 - \frac{2}{s}\sum xq;$$

$$w'_{ab} = \Delta_{ab} + 2sy_a p_b , \quad w''_{ab} = \Delta_{ab} - \frac{2}{s} x_a q_b ;$$

$$\Delta_0 = \sum xp - \sum yq.$$

Bemerkung zur folgenden Tabelle: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Gruppen, so bedeutet $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, dass die Gruppe $\mathfrak{A}$ in der Gruppe $\mathfrak{B}$ als echte Untergruppe enthalten ist. Ist $\mathfrak{C}$ eine dritte Gruppe so leuchtet ein, dass aus $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{C}$ auch $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{C}$ folgt.

ZUSAMMENHANG DER AUFGESTELLTEN GRUPPEN



CURRICULUM VITAE.

Ich Leo (Leib) Krüger, wurde als Sohn des Kaufmanns Oscher Krüger und seiner Gattin Bertha geb. Jossel in Riga (ehemals Russland, jetzt Lettland) am 29. Juni 1903 geboren. Nach anfänglichem Privatunterricht besuchte ich seit 1910 die deutsche private Realschule von Erich Germann, in Riga. Wegen andauernder Störung des Unterrichtsganges durch die Kriegsoperationen, wurde die Schule 1917 zeitweilig geschlossen. Seit 1920 besuchte ich dann das Städtische jüdische Realgymnasium in Riga, dass ich 1921 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Ich studierte dann ein Semester (1923) Physik in Jena. Seit dem S. S. 1924 bin ich an der Universität Basel immatrikuliert und studierte bis 1930 Chemie, wandte mich aber dann dem Studium der Mathematik zu. Während der letzten beiden Jahre war ich Assistent bei Herrn Prof. Ostrowski. Im S. S. 1932 begann ich mit der Arbeit an der vorliegenden Dissertation, und konnte sie im Januar 1933 abschliessen.

Während meiner Studienjahre besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen der folgenden Dozenten:

In Jena: F. Auerbach und W. Wien.

In Basel: A. Bernoulli, F. Fichter, A. Hagenbach, W. Matthies, A. Ostrowski, H. Rupe, Ruggli, A. Schmid, O. Spiess, M. Wehrli.

Allen meinen Lehrern fühle ich mich zu besonderem Danke verpflichtet.

Insbesondere möchte ich Herrn Prof. Ostrowski, dem ich die Anregung zur vorliegenden Arbeit verdanke, meinen aufrichtigsten Dank aussprechen, für das öftere und aufopferungsvolle Entgegenkommen, wodurch mir in jeglicher Hinsicht der Abschluss meiner Studien überhaupt ermöglicht wurde.